PROBLEMA 6.36

Caduta di un manubrio ⋆⋆

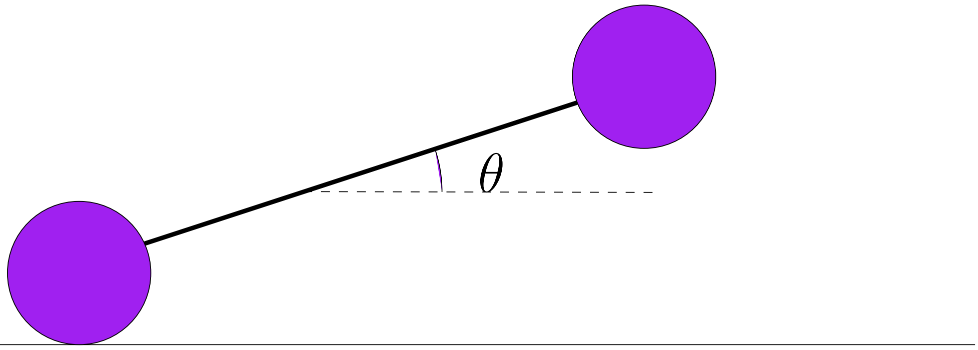

Figura 6.29.: Il sistema descritto nel problema. I due estremi dell'asta sono sulla superficie delle sfere, in altre parole la distanza tra i centri delle due sfere è $L + 2R$.

Due sfere di massa M e raggio R sono collegate da un'asta di uguale massa e lunghezza L. Gli estremi dell'asta sono saldati perpendicolarmente alle superfici delle due sfere. Inizialmente una sfera è appoggiata su un piano orizzontale, e l'asta forma un angolo θ_0 con l'orizzontale. Ad un certo punto si elimina in vincolo che mantiene il sistema in equilibrio.

1. Supponendo che il piano sia privo di attrito determinare la velocità angolare del corpo quando la seconda sfera tocca terra.
2. Rispondere alla stessa domanda precedente, supponendo questa volta che la sfera inizialmente in contatto con il piano rotoli senza strisciare su quest'ultimo.
3. Determinare la reazione normale del piano quando l'inclinazione dell'asta rispetto all'orizzontale diviene $\theta_0/2$.

Soluzione

Domanda 1 Se il piano non ha attrito, non ci sono forze esterne orizzontali applicate al sistema. Di conseguenza la quantità di moto orizzontale si conserva, e il centro di massa si muove solo verticalente, dato che inizialmente è fermo. L'energia del sistema si può allora scrivere

$$E = \frac{1}{2} 3M\dot{y}_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + 3Mgy_{cm} \tag{6.36.1}$$

dove $\omega = \dot{\theta}$ è la velocità angolare del corpo rigido e

$$y_{cm} = \left(R + \frac{L}{2}\right)\sin\theta \tag{6.36.2}$$

è l'altezza del centro di massa (al centro del manubrio) misurata rispetto all'altezza del centro della sfera poggiata a terra. Sostituendo otteniamo

$$E = \frac{1}{2}\left[3M\left(R+\frac{L}{2}\right)^2\cos^2\theta + I_{cm}\right]\dot{\theta}^2 + 3Mg\left(R+\frac{L}{2}\right)\sin\theta \tag{6.36.3}$$

L'espressione tra parentesi quadre

$$I_0 = 3M\left(R+\frac{L}{2}\right)^2\cos^2\theta + I_{cm} \tag{6.36.4}$$

si può interpretare come momento di inerzia del manubrio rispetto al punto istantaneamente fermo attorno al quale sta ruotando, come si vede dalla Figura 6.30.

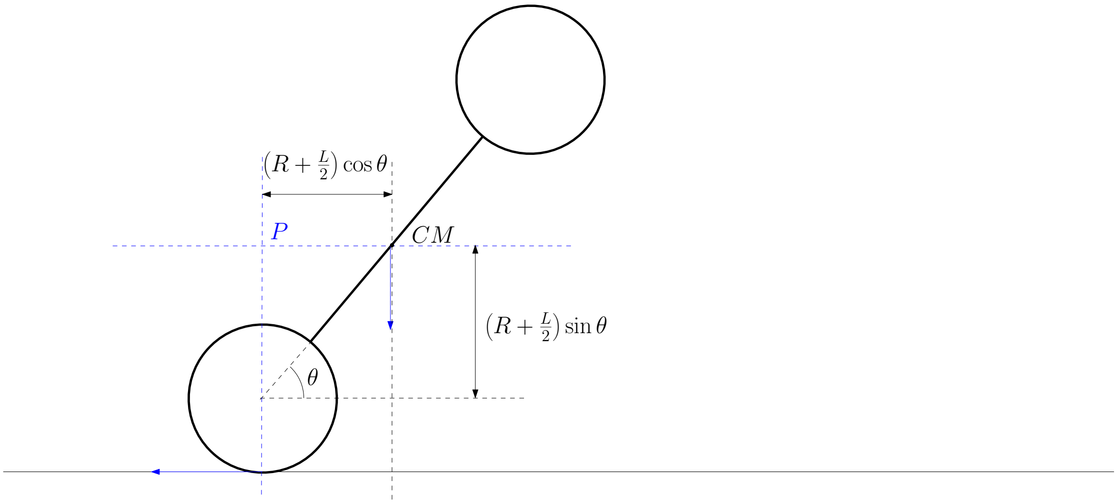

Figura 6.30.: Il manubrio ruota attorno al punto fisso P, che si può determinare con la costruzione in figura notando che il punto di contatto col terreno si muove orizzontalmente e il centro di massa verticalmente. Quindi P deve trovarsi alle intersezioni delle rette perpendicolari alle due velocità.

Uguagliando l'energia iniziale a quella finale abbiamo

$$\frac{1}{2}\left[3M\left(R+\frac{L}{2}\right)^2 + I_{cm}\right]\dot{\theta}^2 = 3Mg\left(R+\frac{L}{2}\right)\sin\theta_0 \tag{6.36.5}$$

da cui

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6Mg\left(R+\frac{L}{2}\right)}{3M\left(R+\frac{L}{2}\right)^2 + I_{cm}}\sin\theta_0 \tag{6.36.6}$$

Per quanto riguarda I_{cm} abbiamo

$$I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2 + 2\left[\frac{2}{5}MR^2 + M\left(R+\frac{L}{2}\right)^2\right] \tag{6.36.7}$$

dove il primo termine è il momento di inerzia dell'asta attorno al suo centro, e il secondo il momento di inerzia delle due sfere (il fattore 2) ottenuto aggiungendo al momento di inerzia rispetto al centro il contributo prescritto dal teorema di Steiner.

Domanda 2 In questo caso possiamo considerare istante per istante il moto del manubrio come puro rotolamento attorno al punto di contatto. Quindi per l'energia abbiamo

$$E = \frac{1}{2} I_0' \dot{\theta}^2 + 3Mg \left(R + \frac{L}{2} \right) \sin\theta \tag{6.36.8}$$

dove

$$I_0' = I_{cm} + 3M \left\{ \left(R + \frac{L}{2} \right)^2 \cos^2\theta + \left[R + \left(R + \frac{L}{2} \right) \sin\theta \right]^2 \right\} \tag{6.36.9}$$

Dalla conservazione dell'energia segue adesso

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6Mg\left(R + \frac{L}{2}\right)}{I_{cm} + 3M\left[\left(R + \frac{L}{2}\right)^2 + R^2\right]} \sin\theta_0 \tag{6.36.10}$$

minore della precedente. La ragione è che al momento dell'arrivo a terra il centro di massa si sta muovendo anche orizzontalmente (con velocità $v_{cm,x} = -R\dot{\theta}$) e parte dell'energia potenziale iniziale si è trasformata nell'energia cinetica legata a questo moto, quindi non è disponibile come energia cinetica di rotazione.

Domanda 3 L'accelerazione verticale del centro di massa è determinata dall'equazione

$$3M\ddot{y}_{cm} = N - 3Mg \tag{6.36.11}$$

dove N è la reazione vincolare che dobbiamo determinare. D'altra parte

$$\ddot{y}_{cm} = \left(R + \frac{L}{2} \right) \left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta \right) \tag{6.36.12}$$

e quindi

$$N = 3M \left[g + \left(R + \frac{L}{2} \right) \left(\ddot{\theta}_f \cos\frac{\theta_0}{2} - \dot{\theta}_f^2 \sin\frac{\theta_0}{2} \right) \right] \tag{6.36.13}$$

dove $\ddot{\theta}_f$, $\dot{\theta}_f$ sono l'accelerazione angolare e la velocità angolare al momento considerato. Dalla conservazione dell'energia abbiamo

$$\frac{1}{2} I\left(\theta_f\right) \dot{\theta}_f^2 + 3Mg\left(R + \frac{L}{2} \right) \sin\theta_f = 3Mg \left(R + \frac{L}{2} \right) \sin\theta_0 \tag{6.36.14}$$

dove $I(\theta)$ è data dalla (6.36.4) o dalla (6.30) a seconda che si consideri il caso senza attrito o con rotolamento puro. In conclusione per un dato angolo

$$\dot{\theta}_f^2 = \frac{6Mg\left(R + \frac{L}{2}\right)}{I\left(\theta_f\right)} \left(\sin\theta_0 - \sin\theta_f \right) = F\left(\theta_f\right) \tag{6.36.15}$$

e derivando rispetto al tempo

$$2\dot{\theta}_f\ddot{\theta}_f = \frac{dF}{d\theta_f}\dot{\theta}_f$$

da cui

$$\ddot{\theta}_f = \frac{1}{2}\frac{dF}{d\theta_f} = -\frac{3Mg\left(R+\frac{L}{2}\right)}{I\left(\theta_f\right)}\left[\cos\theta_f + \left(\sin\theta_0 - \sin\theta_f\right)\frac{1}{I\left(\theta_f\right)}\frac{dI\left(\theta_f\right)}{d\theta_f}\right]$$

Valutando le espressioni precedenti per $\theta_f = \theta_0/2$ si ottengono $\ddot{\theta}_f$, $\dot{\theta}_f$ che sostituiti nella Equazione (6.36.13) danno la soluzione cercata.