PROBLEMA 6.37

Scambio di momento angolare ⋆⋆

Un satellite di massa m ruota in un'orbita circolare di raggio R attorno ad un pianeta di massa $M \gg m$. Inizialmente sia il pianeta che il satellite ruotano su se stessi con velocità angolari $\vec{\omega}_M$ e $\vec{\omega}_m$, non necessariamente perpendicolari al piano dell'orbita. A causa di forze non meglio specificate i due corpi interagiscono tra di loro, e parte dell'energia del sistema viene dissipata. Supponendo che l'orbita del satellite rimanga circolare, determinare le caratteristiche del sistema quando la massima quantità possibile di energia è stata dissipata.

Soluzione

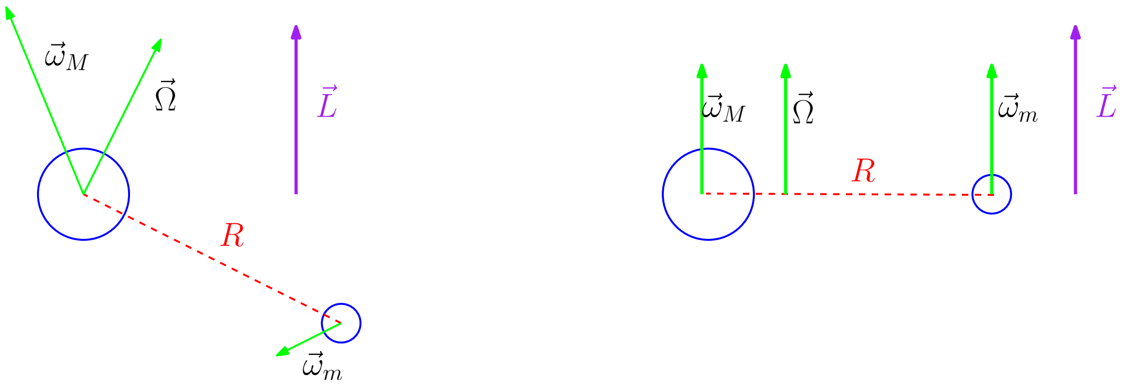

Figura 6.31.: A destra, una possibile configurazione iniziale (vista trasversalmente). Le velocità di rotazione $\vec{\omega}_m$ e $\vec{\omega}_M$ non sono necessariamente perpendicolari al piano dell'orbita, mentre per definizione lo è $\vec{\Omega}$. Nella configurazione finale (a sinistra) $\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_m = \vec{\Omega}$. Di conseguenza tutte e tre sono parallele al momento angolare conservato $\vec{L}$ che determina quindi il piano dell'orbita finale.

Indichiamo con $\vec{\Omega}$ la velocità angolare dell'orbita circolare del satellite. Dato che $M \gg m$ possiamo identificare il centro di questa con il centro del pianeta. Possiamo scrivere l'energia cinetica totale nella forma

$$E_c = \frac{1}{2} I_M \omega_M^2 + \frac{1}{2} I_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} m R^2 \Omega^2$$

dove il primo e il secondo termine sono le energie cinetiche dovute alla rotazione di pianeta e satellite attorno al loro centro di massa, e il terzo è l'energia cinetica dovuta al moto del centro di massa del satellite. Questa energia non si conserva, deve però conservarsi il momento angolare totale del sistema

$$\vec{L} = I_M \vec{\omega}_M + I_m \vec{\omega}_m + m R^2 \vec{\Omega}$$

Possiamo usare questa legge di conservazione per scrivere l'energia cinetica in funzione delle velocità angolari $\vec{\omega}_M$ e $\vec{\omega}_m$

$$E_c = \frac{1}{2} I_M \omega_M^2 + \frac{1}{2} I_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{\vec{L} - I_M \vec{\omega}_M - I_m \vec{\omega}_m}{m R^2} \right)^2$$

dato che

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{L} - I_M \vec{\omega}_M - I_m \vec{\omega}_m}{m R^2} \tag{6.37.1}$$

Adesso possiamo minimizzare l'energia cinetica rispetto a $\vec{\omega}_M$ e $\vec{\omega}_m$. Otteniamo le due condizioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial \vec{\omega}_M} &= I_M \vec{\omega}_M - I_M \left(\frac{\vec{L} - I_M \vec{\omega}_M - I_m \vec{\omega}_m}{m R^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial E_c}{\partial \vec{\omega}_m} &= I_m \vec{\omega}_m - I_m \left(\frac{\vec{L} - I_M \vec{\omega}_M - I_m \vec{\omega}_m}{m R^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Dividendo la prima per I_M, la seconda per I_m e sottraendo membro a membro otteniamo

$$\vec{\omega}_m = \vec{\omega}_M$$

e quindi nella configurazione finale pianeta e satellite hanno la stessa velocità angolare di rotazione su se stessi. Sostituendo, ad esempio, nella prima equazione otteniamo

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_m = \frac{\vec{L}}{(I_M + I_m + m R^2)}$$

cioè entrambe le velocità angolari sono lungo la direzione del momento angolare iniziale. Per quanto riguarda la velocità angolare orbitale abbiamo adesso, sostituendo nella (6.37.1)

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_M = \vec{\omega}_m$$

In conclusione le velocità angolari orbitali sono adesso perpendicolari al piano dell'orbita, e la velocità angolare orbitale è identica a quella di rotazione. In altre parole il satellite e il pianeta rivolgono l'uno verso l'altro sempre la stessa faccia: si muovono come un unico corpo rigido (Figura (6.31)).