PROBLEMA 6.38

Rotolamento puro di un cono ★★

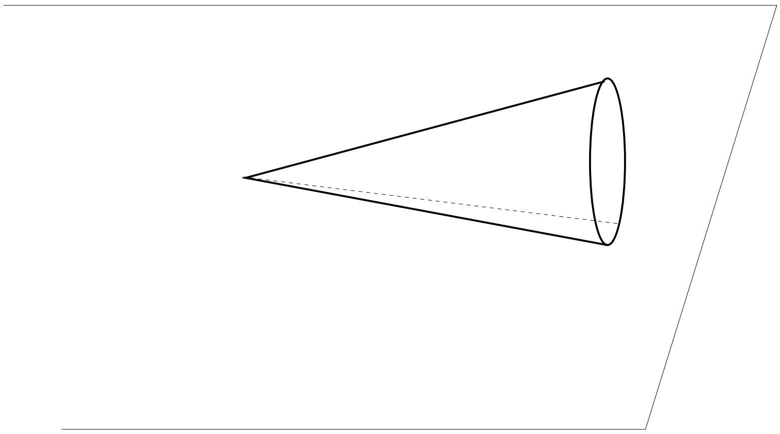

Figura 6.32.: Il cono appoggiato sul piano orizzontale considerato nell'esercizio.

Un cono di raggio R, massa M e altezza h rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Il suo tensore di inerzia, riferito agli assi principali passanti per il centro di massa, vale

$$I = \begin{pmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{pmatrix}$$

1. Scelto un opportuno sistema di coordinate determinare la posizione del centro di massa in funzione del tempo, se il modulo della sua velocità iniziale vale v_0.
2. Nelle stesse condizioni della domanda precedente determinare la velocità angolare $\vec{\omega}$ del cono e il suo momento angolare $\vec{L}$.
3. Se il piano viene adesso inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale determinare la frequenza della piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

Soluzione[9]

Domanda 1

Il centro di massa sarà lungo l'asse del cono. Per determinare la distanza dal vertice si può scrivere

$$\ell_{cm} = \frac{1}{V}\int_0^h z\pi\left(\frac{z}{h}R\right)^2 dz = \frac{\pi\frac{R^2}{h^2}\frac{h^4}{4}}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} = \frac{3}{4}h$$

[9]Primo esercizio dello scritto di Fisica 1 del 19/6/2007

Dato che il cono rotola senza strisciare, tutti i suoi punti a contatto con il piano sono fermi, e definiscono l'asse istantaneo di rotazione. In particolare il vertice è sempre a contatto, quindi è un punto fisso. L'altezza del centro di massa rispetto al piano resta costante nel tempo e uguale a

$$z_{cm} = \ell_{cm} \sin \alpha$$

dove abbiamo indicato con α la metà dell'angolo al vertice,

$$\tan \alpha = \frac{R}{h}$$

La proiezione del centro di massa sul piano si muoverà invece rimanendo a una distanza dal vertice data da $\rho_{cm} = \ell_{cm} \cos \alpha$. Avremo

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \rho_{cm} \cos \phi \\ y_{cm} &= \rho_{cm} \sin \phi \end{aligned}$$

dove ϕ (l'angolo che determina la posizione dell'asse istantaneo di rotazione) è determinato dalla condizione

$$v_{cm} = \rho_{cm} \dot{\phi}$$

e dato che, come discusso in seguito, il modulo v_{cm} della velocità del centro di massa è costante avremo $\phi = \phi_0 + \frac{v_0}{\rho_{cm}} t$.

Domanda 2

La velocità angolare sarà diretta come l'asse istantaneo di rotazione. Inoltre dovrà essere

$$v_{cm} = \omega z_{cm}$$

possiamo quindi scrivere

$$\vec{\omega} = \frac{v_{cm}}{z_{cm}} \left(\hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi \right)$$

Per quanto riguarda il momento angolare, possiamo scriverlo rispetto a un polo preso nel vertice del cono. Dato che questo è un punto fisso possiamo scrivere semplicemente

$$\vec{L} = I_V \vec{\omega}$$

dove I_V è il tensore di inerzia relativo ad esso. Possiamo ottenere quest'ultimo in due passi. Scriviamo anzitutto il tensore di inerzia relativo al vertice riferito agli assi principali del cono.

Dal teorema di Steiner abbiamo

$$I_V = \begin{pmatrix} I_0 + m\ell_{cm}^2 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 + m\ell_{cm}^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{pmatrix}$$

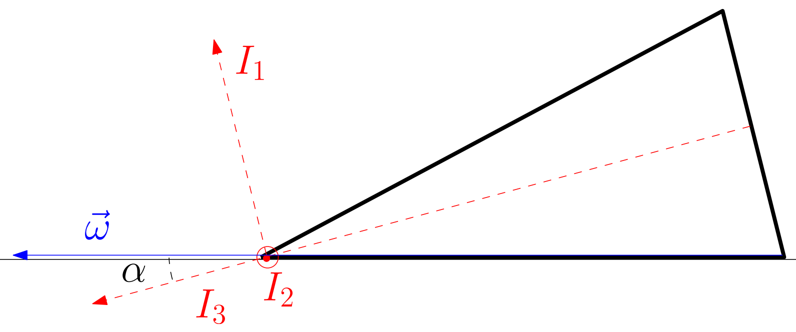

Figura 6.33.: Gli assi principali di inerzia del cono (visto in sezione) e la loro relazione rispetto al vettore velocità angolare, che è parallelo all'asse istantaneo di rotazione. L'angolo α tra $\vec{\omega}$ e la direzione principale corrispondente a I_3 è quindi la metà dell'angolo al vertice del cono.

Sempre nello stesso sistema possiamo scrivere la velocità angolare nella forma (vedere Figura 6.33)

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \sin\alpha \\ \omega\cos\alpha \end{pmatrix}$$

da cui

$$\vec{L} = I_V\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ (I_0 + m\ell_{cm}^2)\omega\sin\alpha \\ I_1\omega\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Quindi $\vec{L}$ è contenuto nel piano determinato da $\vec{\omega}$ e dall'asse del cilindro. Infine $\vec{\omega}$ e $\vec{L}$ sono costanti in modulo e l'angolo tra di essi è pure costante. Possiamo scrivere l'energia cinetica del cilindro nella forma

$$E = \frac{1}{2}\vec{L}\cdot\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left[\left(I_0 + m\ell_{cm}^2\right)\sin^2\alpha + I_1\cos^2\alpha\right]\omega^2$$

e dalla sua conservazione segue che $\vec{\omega}$ è costante in modulo, quindi anche v_{cm} lo sarà.

Domanda 3

Possiamo risolvere il problema aggiungendo all'energia cinetica un termine di energia potenziale gravitazionale. Abbiamo

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 + mgd_{cm}$$

dove

$$d_{cm} = z_{cm}\cos\theta - x_{cm}\sin\theta$$

cioè

$$d_{cm} = -\frac{3}{4}h\cos\alpha\sin\theta\cos\phi + \text{costante}$$

Dato che

$$\omega = \dot{\phi} \cot \alpha$$

abbiamo per piccole oscillazioni

$$E = \frac{1}{2} I \cot^2 \alpha \dot{\phi}^2 + \frac{3}{8} mgh \cos \alpha \sin \theta \phi^2$$

e quindi

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3mgh \sin^2 \alpha \sin \theta}{4I \cos \alpha}}$$