PROBLEMA 6.39

Un carrello in discesa ★★

Il carrello in Figura 6.34 è ottenuto unendo due cilindri di massa m_1 e m_2 e raggio R mediante una sbarra di massa m_A e lunghezza ℓ. Sia i cilindri che l'asta sono omogenei. I cilindri sono liberi di ruotare attorno al proprio asse ed è presente attrito statico descritto dal coefficiente μ_s.

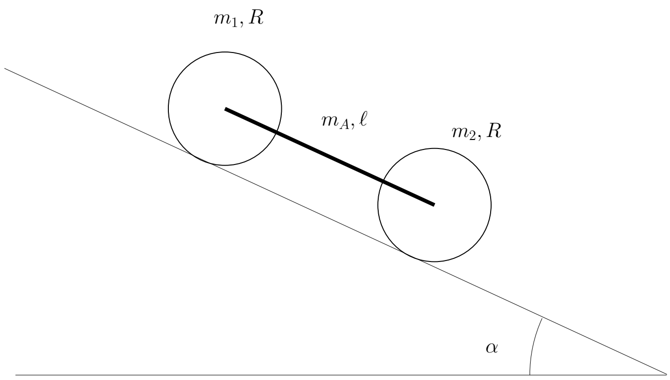

Figura 6.34.: Il carrello descritto nell'esercizio.

1. Assumendo che i due cilindri ruotino senza strisciare calcolare le reazioni normali N_1 e N_2 che il piano esercita su di essi.
2. Calcolare l'accelerazione del centro di massa del carrello.
3. Calcolare il minimo valore di μ_s necessario a permettere ai cilindri di ruotare senza strisciare, per un fissato angolo α.

Soluzione[10]

Domanda 1

La somma delle forze applicate a ciascun cilindro in direzione perpendicolare al piano devono annullarsi. Da questo segue

$$
\begin{aligned}
N_1 + P_1 - m_1 g \cos\alpha &= 0 \\
N_2 + P_2 - m_2 g \cos\alpha &= 0
\end{aligned}
$$

dove come indicato nella Figura 6.35 P_1 e P_2 sono le componenti perpendicolari al piano delle forze che l'asta applica al centro del cilindro. Se consideriamo adesso il momento delle forze applicate all'asta rispetto al suo centro di massa abbiamo che deve essere

$$
P_1 \frac{\ell}{2} - P_2 \frac{\ell}{2} = 0
$$

[10]Primo esercizio scritto 30/3/2007

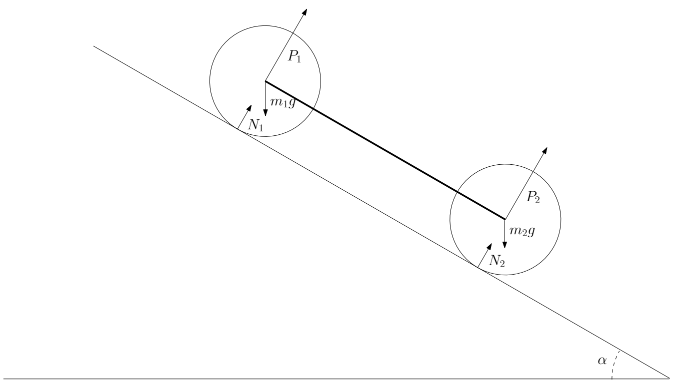

Figura 6.35.: Le forze applicate al cilindro che contribuiscono nella direzione normale al piano.

mentre la somma delle forze applicate all'asta in direzione perpendicolare al piano deve pure annullarsi:

$$P_1 + P_2 + m_A g \cos\alpha = 0\,.$$

Da queste due relazioni segue

$$P_1 = P_2 = -\frac{1}{2} m_A g \cos\alpha$$

e quindi

$$N_1 = \left(m_1 + \frac{1}{2} m_A\right) g \cos\alpha$$
$$N_2 = \left(m_2 + \frac{1}{2} m_A\right) g \cos\alpha$$

Domanda 2

Possiamo scrivere l'energia del sistema nella forma

$$E = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + m_A\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(I_1 + I_2\right)\omega^2 - \left(m_1 + m_2 + m_A\right) g x \sin\alpha$$

dove x è una coordinata scelta parallelamente al piano. Dalla condizione di rotolamento puro segue che $\omega = \dot{x}/R$ e poichè $I_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2$, $I_1 = \frac{1}{2} m_2 R^2$ abbiamo

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} m_1 + \frac{3}{2} m_2 + m_A\right)\dot{x}^2 - \left(m_1 + m_2 + m_A\right) g x \sin\alpha$$

Derivando rispetto al tempo otteniamo l'equazione del moto

$$\ddot{x} = \frac{\left(m_1 + m_2 + m_A\right) g \sin\alpha}{\left(\frac{3}{2} m_1 + \frac{3}{2} m_2 + m_A\right)}$$

che ci dà direttamente l'accelerazione.

Domanda 3

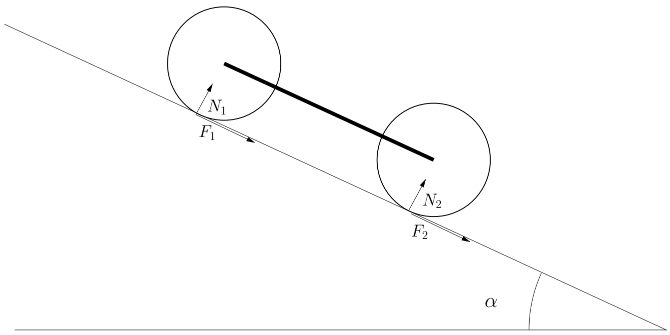

Figura 6.36.: Le reazioni vincolari del piano.

Possiamo utilizzare la soluzione della domanda precedente e scrivere per ciascun cilindro

$$-I_i\frac{\ddot{x}}{R} = F_i R$$

dove F_i è la forza di attrito. Segue che

$$F_i = -\frac{1}{2}m_i\frac{(m_1+m_2+m_A)\,g\sin\alpha}{\left(\frac{3}{2}m_1+\frac{3}{2}m_2+m_A\right)}$$

ma deve essere $|F_i| \leq \mu_s N_i$ da cui

$$m_i\frac{(m_1+m_2+m_A)\,g\sin\alpha}{(3m_1+3m_2+2m_A)} \leq \mu_s\left(m_i+\frac{1}{2}m_A\right)g\cos\alpha$$

ossia per $i=1,2$

$$\mu_s \geq \frac{(m_1+m_2+m_A)}{(3m_1+3m_2+2m_A)}\frac{m_i}{\left(m_i+\frac{1}{2}m_A\right)}\tan\alpha\,.$$

La condizione più restrittiva è quella relativa alla più grande tra le due masse m_1, m_2.