PROBLEMA 6.3

Tensore di inerzia e rotazioni ⋆⋆⋆

Trovare la legge di trasformazione del tensore di inerzia di un corpo rigido per rotazioni infinitesime del sistema di coordinate. Mostrare che se il corpo rigido è invariante per rotazioni il tensore di inerzia è diagonale.

Soluzione

Il tensore di inerzia si può scrivere nella forma

$$I^{ab} = \int dm \left(r^2 \delta^{ab} - r^a r^b \right) .$$

Sappiamo che sotto rotazioni infinitesime possiamo scrivere la legge di trasformazione di un vettore (ad esempio $\vec{r}$) come

$$\vec{r} \to \vec{r} + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} = \vec{r} + \Gamma \vec{r}$$

dove

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{pmatrix} .$$

Il tensore trasformerà come il prodotto delle componenti di due vettori, e quindi come

$$I \to (1 + \Gamma) I (1 + \Gamma)^T = I + \Gamma I - I \Gamma .$$

Se il corpo rigido è invariante deve essere

$$\Gamma I - I \Gamma = 0$$

ossia

$$\begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I^{xx} & I^{xy} & I^{xz} \\ I^{yx} & I^{yy} & I^{yz} \\ I^{zx} & I^{zy} & I^{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^{xx} & I^{xy} & I^{xz} \\ I^{yx} & I^{yy} & I^{yz} \\ I^{zx} & I^{zy} & I^{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{pmatrix} .$$

Calcolando la componente $1,1$ di ambo i membri abbiamo

$$-\varepsilon_z I^{yx} + \varepsilon_y I^{zx} = \varepsilon_z I^{xy} - \varepsilon_y I^{xz}$$

da cui $I^{yx} = I^{xy} = 0$ e $I^{xz} = I^{zx} = 0$. Dalla componente $2,2$ abbiamo analogamente

$$\varepsilon_z I^{xy} - \varepsilon_x I^{zy} = -\varepsilon_z I^{yx} + \varepsilon_x I^{yz}$$

da cui segue anche $I^{yz} = I^{zy} = 0$. Il tensore di inerzia è dunque diagonale. Considerando la componente $1,2$ abbiamo

$$-\varepsilon_z I^{yy} = -\varepsilon_z I^{xx}$$

e dalla $1,3$

$$\varepsilon_y I^{zz} = \varepsilon_y I^{xx}$$

da cui segue $I^{xx} = I^{yy} = I^{zz}$.