PROBLEMA 6.41

Distacco di una bacchetta rotante ⋆⋆

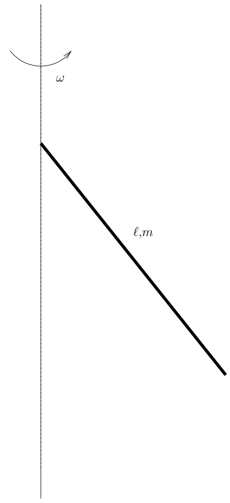

Figura 6.38.: La bacchetta forma un angolo costante rispetto all'asse attorno al quale ruota.

La bacchetta rigida in Figura 6.38, di lunghezza ℓ, massa m e spessore trascurabile, ruota attorno all'asse verticale con velocità angolare costante ω. L'angolo θ tra asse e bacchetta è fisso.

1. Calcolare l'energia cinetica del sistema.
2. Calcolare il vettore momento angolare del sistema, $\vec{L}(t)$.
3. Supponendo che a un certo istante il vincolo venga a mancare discutere il moto successivo tenendo conto dell'effetto della gravità.

Soluzione[12]

Domanda 1

L'energia cinetica si può scrivere come energia di pura rotazione attorno al punto fisso,

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 . \tag{6.41.1}$$

Il calcolo del momento di inerzia I si può fare direttamente, integrando sulla lunghezza della sbarra:

$$I = \int_0^\ell \frac{m}{\ell} (r \sin\theta)^2 \, dr = \frac{m}{3} \ell^2 \sin^2\theta \, . \tag{6.41.2}$$

[12]Primo problema scritto 21/1/2009

Domanda 2

Possiamo calcolare il momento angolare totale sommando i contributi di ogni elemento della sbarra. Questo significa valutare

$$\vec{L} = \int dm \vec{r} \wedge \vec{v} \,. \tag{6.41.3}$$

Introducendo un versore $\hat{\tau}$ nella direzione della bacchetta e identificando l'asse di rotazione con l'asse z possiamo scrivere

$$dm = \frac{m}{\ell} dr \tag{6.41.4}$$

$$\vec{r} = \hat{\tau} r \tag{6.41.5}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \omega r \left(\hat{z} \wedge \hat{\tau} \right) \tag{6.41.6}$$

e quindi

$$\vec{L} = \frac{m\omega}{\ell} \hat{\tau} \wedge \left(\hat{z} \wedge \hat{\tau} \right) \int_0^{\ell} dr r^2 \tag{6.41.7}$$

Sfruttando l'identità $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c} \right) = \vec{b} \left(\vec{a} \cdot \vec{c} \right) - \vec{c} \left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right)$ si trova

$$\hat{\tau} \wedge \left(\hat{z} \wedge \hat{\tau} \right) = \hat{z} - \hat{\tau} \left(\hat{z} \cdot \hat{\tau} \right) = \hat{z} + \cos\theta \hat{\tau} \tag{6.41.8}$$

e quindi, ponendo l'asse x ad un dato istante nel piano contenente l'asse di rotazione e la bacchetta, abbiamo

$$\vec{L} = \frac{m\omega}{3} \ell^2 \left(\hat{z} + \cos\theta \hat{\tau} \right) = \frac{m\omega}{3} \ell^2 \sin\theta \left[\sin\theta \hat{z} + \cos\theta \hat{x} \right] \tag{6.41.9}$$

Notare che il momento angolare è sempre ortogonale alla bacchetta:

Domanda 3

Dal momento in cui il vincolo viene a mancare si conserva il momento angolare e l'energia. Quindi, supponendo che il distacco avvenga quando la bacchetta si trova nel piano z,x:

1. Il centro di massa della bacchetta si muoverà di moto uniformemente accelerato (accelerazione), con la velocità iniziale che aveva al momento del distacco, cioè

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{2} \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{dist} = \frac{\ell}{2} \omega \left(\hat{z} \wedge \hat{\tau} \right) = \frac{\ell}{2} \omega \sin\theta \hat{y} \tag{6.41.10}$$

2. Nel sistema del centro di massa, in caduta libera con la bacchetta, non vi sono forze esterne. Il moto è quindi quello di una trottola simmetrica libera.

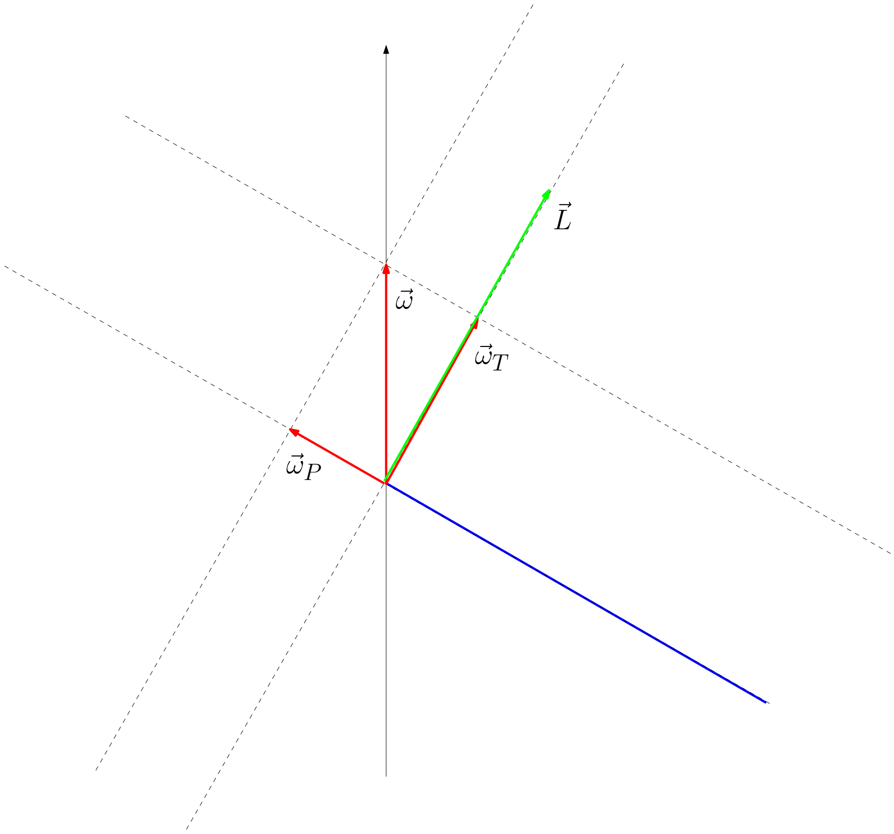

Figura 6.39.: La bacchetta al momento del distacco: il momento angolare è in verde, la velocità angolare in rosso.

3. Ponendoci nel piano identificato dalla bacchetta e dalla velocità angolare ad un istante dato come in Figura 6.39, possiamo scomporre $\vec{\omega}$ in una componente parallela alla bacchetta $\vec{\omega}_P$ e in una trasversale $\vec{\omega}_T$. Dato che il momento di inerzia rispetto all'asse della bacchetta è nullo, avremo

$$\vec{L} = I_T \vec{\omega}_T \tag{6.41.11}$$

dove $I_T = \frac{1}{12} m\ell^2$ è il momento di inerzia della bacchetta rispetto ad un asse trasverso passante per il centro di massa. Quindi anche $\vec{\omega}_T$ si conserva, e la bacchetta ruota attorno a $\vec{L}$ fisso nello spazio con velocità angolare $\omega \sin\theta$.