PROBLEMA 6.44

Urto con un'asta sul fondo di una scodella ⋆⋆

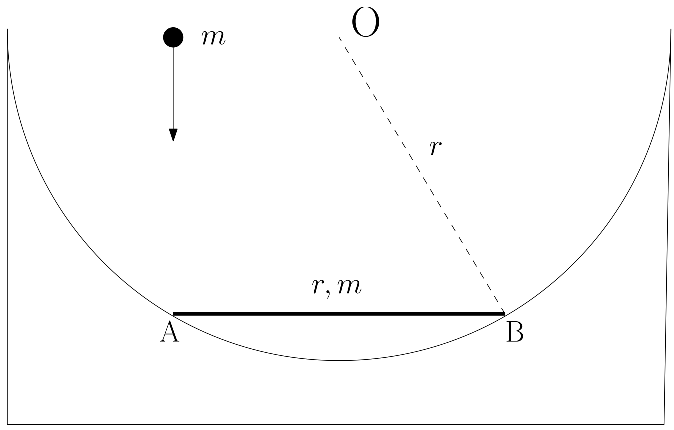

Figura 6.42.: L'asta con gli estremi vincolati alla guida semicircolare.

Un'asta di massa m e lunghezza r si muove con gli estremi vincolati ad una guida semicircolare priva di attrito. Il raggio della guida è uguale alla lunghezza dell'asta, e quest'ultima si trova inizialmente in equilibrio nella posizione in Figura 6.42. Una particella di massa uguale a quella dell'asta viene lasciata cadere sulla verticale di un'estremo dell'asta, da un'altezza iniziale uguale a quella del centro della guida. L'urto con l'estremo dell'asta è istantaneo e la particella rimane attaccata ad essa.

1. Determinare l'angolo che l'asta forma con l'orizzontale nella posizione di equilibrio del sistema.
2. Calcolare l'energia dissipata durante l'urto.
3. Calcolare l'altezza massima raggiunta dal centro di massa del sistema dopo l'urto.

Soluzione[15]

Domanda 1

Il centro di massa del sistema si trova nel punto P posto a una distanza $r/4$ dal punto A, e la posizione di equilibrio si avrà quando l'energia potenziale gravitazionale è minima, cioè quando P si troverà sotto O. Questo significa che l'asta avrà ruotato di un angolo θ dato da

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{4}r}{\frac{\sqrt{3}}{2}r} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

[15]Primo esercizio compitino 23 marzo 2010

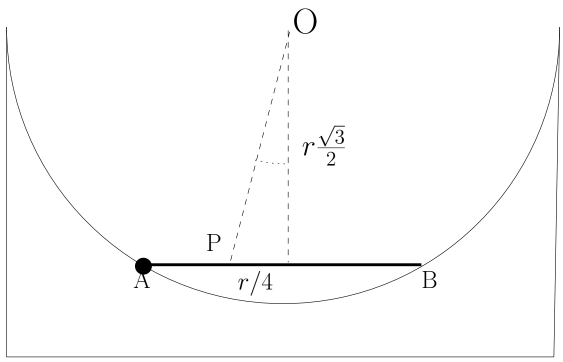

Figura 6.43.: La posizione del centro di massa e l'angolo di rotazione all'equilibrio.

Domanda 2

Immediatamente prima dell'urto la velocità della particella vale ($h = r\sqrt{3}/2$ è l'altezza da cui cade)

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{gr\sqrt{3}}$$

Durante l'urto si conserva il momento angolare rispetto al punto O, perchè le uniche forze impulsive esterne (le reazioni vincolari) hanno momento nullo. Questo vale immediatamente prima

$$L_O = mv_0\frac{r}{2} = m\frac{r}{2}\sqrt{gr\sqrt{3}}$$

e immediatamente dopo

$$L_O = I\omega$$

dove I è il momento di inerzia del sistema rispetto ad O:

$$I = \left(\frac{1}{12}mr^2 + \frac{3}{4}mr^2\right) + mr^2 = \frac{11}{6}mr^2$$

Nell'espressione precedente il termine tra parentesi è il momento di inerzia della sbarra, calcolato tramite il teorema di Steiner, e l'altro il contributo della particella. Abbiamo quindi

$$\omega^2 = \left(\frac{mr}{2I}\right)^2 gr\sqrt{3}$$

L'energia cinetica del sistema dopo l'urto vale quindi

$$E_f = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{3\sqrt{3}}{44}mgr$$

mentre prima valeva

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}mgr$$

l'energia dissipata è quindi

$$\Delta E = E_i - E_f = \frac{19}{44}\sqrt{3}mgr$$

Domanda 3

Il centro di massa raggiungerà la sua altezza massima rispetto alla quota iniziale quando tutta l'energia cinetica si sarà convertita in energia potenziale. Quindi

$$\frac{3\sqrt{3}}{44}mgr = 2mg\Delta h$$

ossia

$$\Delta h = \frac{3\sqrt{3}}{88}r$$