PROBLEMA 6.46

Ancora sulla caduta di un manubrio ⋆⋆

Facendo riferimento all'esercizio 6.36 determinare come varia durante la caduta (cioè in funzione di θ) la reazione tangente al piano di appoggio se

1. il piano è privo di attrito
2. Il manubrio ruota senza strisciare sul piano di appoggio

Soluzione

Se il piano è privo di attrito la reazione tangente è per definizione nulla.

Nel caso di rotolamento puro invece possiamo scrivere

$$R_x = 3M\ddot{x}_{cm} \tag{6.46.1}$$

dove x_{cm} è la posizione orizzontale del centro di massa del sistema rispetto a un sistema di riferimento inerziale. Fissando un'origine sul piano possiamo scrivere

$$x_{cm} = X + \left(R + \frac{L}{2}\right)\cos\theta \tag{6.46.2}$$

dove X è la posizione del punto di appoggio del manubrio rispetto all'origine scelta. Derivando rispetto al tempo abbiamo

$$\dot{x}_{cm} = \dot{X} - \dot{\theta}\left(R + \frac{L}{2}\right)\sin\theta \tag{6.46.3}$$

Ma $\dot{X}$ è anche la velocità del centro della sfera appoggiata a terra, che vale $-R\dot{\theta}$ a causa della condizione di rotolamento. Quindi

$$\dot{x}_{cm} = -R\dot{\theta} - \dot{\theta}\left(R + \frac{L}{2}\right)\sin\theta \tag{6.46.4}$$

Derivando ancora abbiamo

$$\ddot{x}_{cm} = -R\ddot{\theta} - \left(R + \frac{L}{2}\right)\left(\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta\right) \tag{6.46.5}$$

e quindi

$$R_x = -3M\left[R\ddot{\theta} + \left(R + \frac{L}{2}\right)\left(\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta\right)\right] \tag{6.46.6}$$

Dalla legge di conservazione dell'energia scritta nell'esercizio 6.36 possiamo scrivere $\dot{\theta}^2$ in funzione dell'angolo, ottenendo (Equazioni (6.36.8) e (6.36.9))

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6Mg\left(R + \frac{L}{2}\right)}{I_{cm} + 3M\left\{\left(R + \frac{L}{2}\right)^2\cos^2\theta + \left[R + \left(R + \frac{L}{2}\right)\sin\theta\right]^2\right\}} \equiv F(\theta)$$

e derivando rispetto al tempo otteniamo (omettiamo i calcoli per semplicità)

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{dF}{d\theta} \tag{6.46.7}$$

che sostituite nella (6.46.6) danno la soluzione del problema. Notare che omettendo il termine X nella (6.46.2) si sarebbe ottenuto un risultato scorretto, infatti $(R + L/2)\cos\theta$ è la posizione orizzontale del centro di massa rispetto al punto di contatto tra corpo rigido e piano orizzontale, che si muove orizzontalmente ed in particolare accelera.