PROBLEMA 6.47

Caduta di due aste incernierate ⋆⋆

Due aste di lunghezza ℓ_1 ed e di massa e m_2 sono collegate ad un estremo da una cerniera che permette una rotazione libera. L'altro estremo dell'asta di lunghezza ℓ_1 è fissato ad un punto fisso, come in Figura 6.45, con un altra cerniera identica alla precedente. Inizialmente le due aste sono in quiete, ed entrambe inclinate di un angolo θ_0 rispetto all'orizzontale. Vengono quindi lasciate libere di cadere sotto l'azione di un campo di gravità costante.

Per opportuni valori di , ℓ_2, m_1 e m_2 è possibile che durante la caduta le aste rimangano allineate?

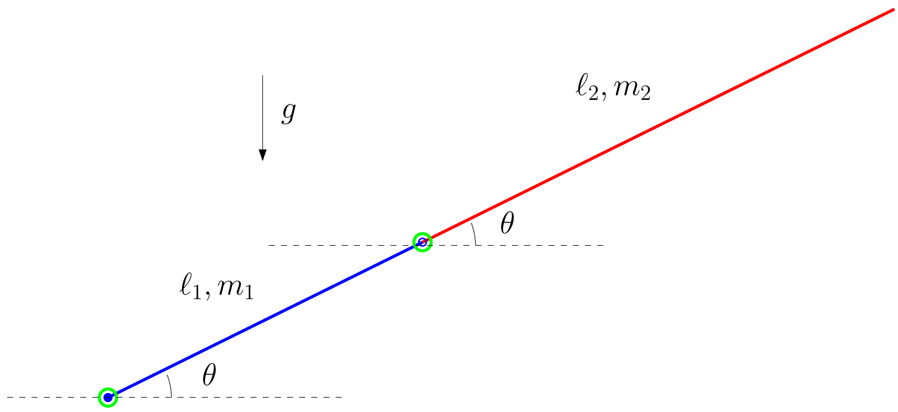

Figura 6.45.: Le due aste (blu e rossa) e gli snodi (in verde). Nella configurazione iniziale le sbarre sono allineate, come in figura.

Soluzione

Supponiamo che le due aste rimangano allineate, e verifichiamo che le equazioni cardinali siano consistenti. La seconda equazione cardinale per il sistema complessivo, scegliendo come polo la cerniera che si trova ad una estremità, si scrive

$$\left[\frac{1}{3}m_1\ell_1^2+\frac{1}{12}m_2\ell_2^2+m_2\left(\ell_1+\frac{1}{2}\ell_2\right)^2\right]\ddot{\theta}=-\left[\frac{1}{2}m_1\ell_1+m_2\left(\ell_1+\frac{1}{2}\ell_2\right)\right]g\cos\theta \tag{6.47.1}$$

che permette subito di calcolare l'accelerazione angolare $\ddot{\theta}$. La seconda equazione cardinale per la sbarra di lunghezza ℓ_2, rispetto al suo centro di massa, si scrive invece

$$\frac{1}{12}m_2\ell_2^2\ddot{\theta}=F_\perp\frac{\ell_2}{2} \tag{6.47.2}$$

dove $F_\perp$ è la componente della forza che agisce sulla sbarra alla giuntura perpendicolare alla sbarra stessa. Da questo segue

$$F_\perp = \frac{1}{6} m_2 \ell_2 \ddot{\theta} \tag{6.47.3}$$

Chiaramente le equazioni (6.47.1) e (6.47.2) ammettono una soluzione per qualsiasi valore dei parametri, quindi non ci danno informazioni sul mantenimento dell'allineamento tra le due sezioni. Però in linea di principio permettono di calcolare in modo univoco $\theta(t)$ e $F_\perp$.

Date queste informazioni, verifichiamo la compatibilità con le prime equazioni cardinali. Consideriamo adesso l'accelerazione tangenziale del centro di massa della sbarra di lunghezza ℓ_2. Deve essere

$$m_2 \left(\ell_1 + \frac{\ell_2}{2}\right) \ddot{\theta} = -m_2 g \cos\theta - F_\perp \tag{6.47.4}$$

ossia, sostituendo l'espressione di $F_\perp$ determinata precedentemente,

$$\left(\ell_1 + \frac{2}{3}\ell_2\right) \ddot{\theta} = -g \cos\theta \tag{6.47.5}$$

Sostituiamo infine $\ddot{\theta}$ usando la (6.47.1)

$$\left(\ell_1 + \frac{2}{3}\ell_2\right) \left[\frac{1}{2} m_1 \ell_1 + m_2 \left(\ell_1 + \frac{1}{2}\ell_2\right)\right] = \frac{1}{3} m_1 \ell_1^2 + \frac{1}{12} m_2 \ell_2^2 + m_2 \left(\ell_1 + \frac{1}{2}\ell_2\right)^2 \tag{6.47.6}$$

Questa è la relazione cercata tra i parametri.

Studiamo in particolare il caso in cui la densità lineare di massa delle due aste è la stessa. In questo caso abbiamo

$$\left(\ell_1 + \frac{2}{3}\ell_2\right) \left[\frac{1}{2} \ell_1^2 + \ell_2 \left(\ell_1 + \frac{1}{2}\ell_2\right)\right] = \frac{1}{3} \ell_1^3 + \frac{1}{12} \ell_2^3 + \ell_2 \left(\ell_1 + \frac{1}{2}\ell_2\right)^2 \tag{6.47.7}$$

che si può semplificare come

$$\ell_1 \left[\ell_1 m_1 + \ell_2 \left(2m_1 + m_2\right)\right] = 0 \tag{6.47.8}$$

Quindi, a parte il caso banale $\ell_1 = 0$, non è possibile mantenere le sbarre allineate durante la caduta.