PROBLEMA 6.50

Caduta di una torre ⋆⋆⋆

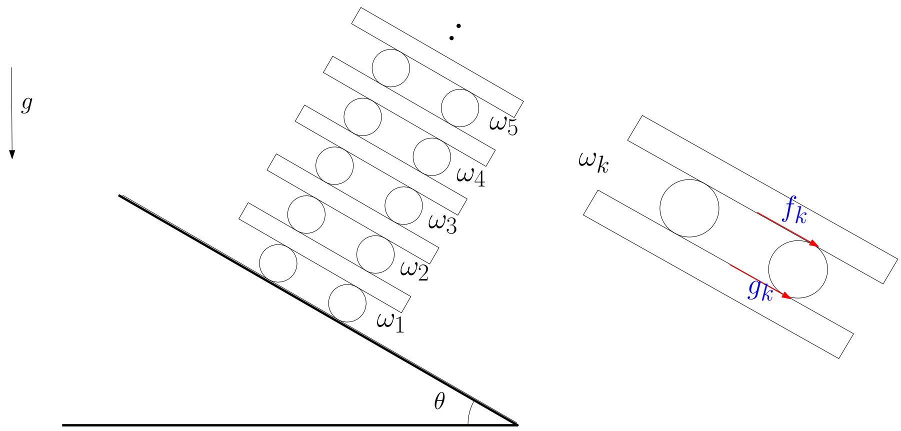

Figura 6.48.: La torre sul piano inclinato. Con g_k si indica la componente della forza di contatto esercitata dallo strato k-simo di cilindri sul piano inferiore parallela a quest'ultimo. Similmente con f_k si indica la componente della forza di contatto esercitata dallo strato k-simo di cilindri sul piano superiore, sempre parallela a quest'ultimo.

Su un piano inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo α si costruisce una torre come in Figura 6.48 sovrapponendo un numero infinito di strati. Ciascun strato è formato da una coppia di cilindri di raggio R e massa M, sui quali appoggia un parallelepipedo di massa M. I cilindri rotolano senza strisciare su tutti i piani con i quali sono a contatto.

Determinare le accelerazioni angolari dei cilindri.

Soluzione

Se scriviamo le equazioni del moto per i cilindri e per i parallelepipedi, notiamo che queste consistono in relazioni lineari tra le costanti in gioco. Inoltre l'unica componente rilevante dell'accelerazione di gravità è quella parallela al piano. Di conseguenza per motivi dimensionali l'accelerazione angolare dei cilindri del primo strato dovrà essere della formadove β è una costante adimensionale da determinare. Per la condizione di rotolamento puro l'accelerazione del primo parallelepipedo è parallela al piano inclinato e vale

$$a_1 = -2R\dot{\omega}_1 = -2\beta g \sin\theta \tag{6.50.1}$$

Consideriamo adesso il sistema appoggiato su questo parallelepipedo. Dato che la torre è costituita da un numero infinito di strati, esso è indistinguibile dalla torre completa. L'unica differenza è che nel sistema solidale con la base dovremo tenere conto della forza apparente dovuta all'accelerazione, che si tradurrà in una accelerazione di gravità

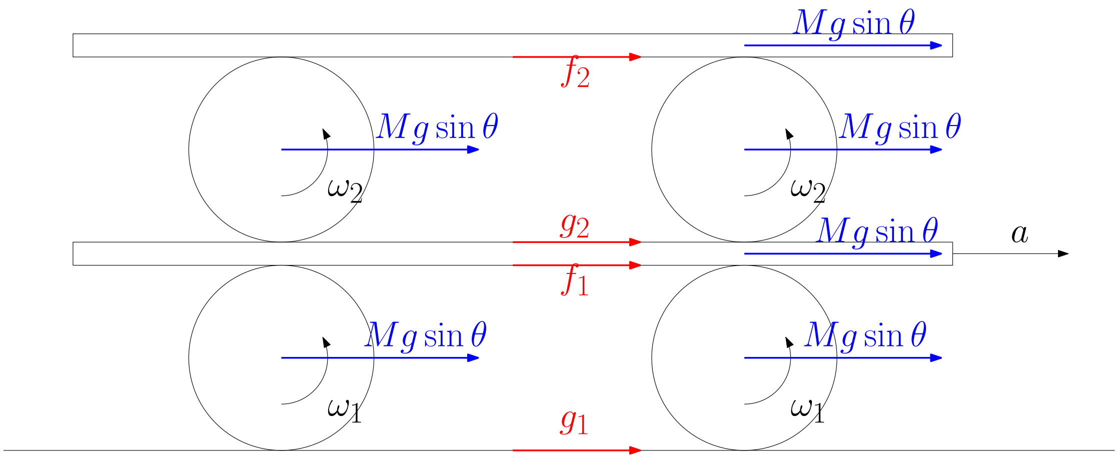

Figura 6.49.:

efficace lungo il piano uguale a

$$g'\sin\theta = g\sin\theta - a_1 = g\sin\theta\,(1+2\beta) \tag{6.50.2}$$

e di conseguenza

$$\dot{\omega}_2 = \beta\frac{g'\sin\theta}{R} = \beta\frac{g\sin\theta}{R}\,(1+2\beta) \tag{6.50.3}$$

Scriviamo adesso le equazioni del moto per i cilindri del primo strato. Abbiamo per il centro di massa di ciascuno di essi

$$-MR\dot{\omega}_1 = -M\beta g\sin\theta = Mg\sin\theta - \frac{1}{2}\,(f_1+g_1) \tag{6.50.4}$$

e per l'accelerazione angolare

$$I\dot{\omega}_1 = \frac{1}{2}MR^2\beta\frac{g\sin\theta}{R} = \frac{1}{2}R\,(f_1-g_1) \tag{6.50.5}$$

Per il centro di massa del parallelepipedo abbiamo invece

$$Ma_1 = -2M\beta g\sin\theta = f_1+g_2 \tag{6.50.6}$$

Abbiamo tre relazioni e quattro incognite (g_{ta}, f_1, g_1, g_2). Aggiungiamo quindi le equazioni per il secondo strato. Nel sistema di riferimento solidale con il parallelepipedo abbiamo per il centro di massa di ciascuno dei cilindri

$$-MR\dot{\omega}_2 = -MR\beta\frac{g\sin\theta}{R}\,(1+2\beta) = Mg\sin\theta\,(1+2\beta) - \frac{1}{2}\,(f_2+g_2) \tag{6.50.7}$$

e per le loro accelerazioni angolari

$$I\dot{\omega}_2 = \frac{1}{2}MR^2\beta\frac{g\sin\theta}{R}\,(1+2\beta) = \frac{1}{2}R\,(f_2-g_2) \tag{6.50.8}$$

Abbiamo adesso un numero sufficiente di equazioni. Le riscriviamo per chiarezza:

$$\begin{aligned}
2M\left(1+\beta\right)g\sin\theta &= f_1+g_1\\
M\beta g\sin\theta &= f_1-g_1\\
-2M\beta g\sin\theta &= f_1+g_2\\
2Mg\sin\theta\left(1+\beta\right)\left(1+2\beta\right) &= f_2+g_2\\
Mg\sin\theta\beta\left(1+2\beta\right) &= f_2-g_2
\end{aligned}$$

Ricaviamo f_1 sommando membro a membro le prime due equazioni e g_2 sottraendo le ultime due

$$\begin{aligned}
f_1 &= Mg\sin\theta\left(1+\frac{3}{2}\beta\right)\\
g_2 &= Mg\sin\theta\left(1+2\beta\right)\left(1+\frac{1}{2}\beta\right)
\end{aligned}$$

ed infine sostituiamo nella terza, ottenendo

$$1+\frac{3}{2}\beta+\left(1+2\beta\right)\left(1+\frac{1}{2}\beta\right)+2\beta=0$$

Abbiamo le due soluzioni $\beta=-3\pm\sqrt{7}$. Abbiamo già determinato le accelerazioni angolari dei primi due strati di cilindri in funzione di β. Per determinare quelle dei successivi possiamo osservare che l'accelerazione del parallelepipedo k-simo sarà

$$a_k=-2R\sum_{i=1}^{k}\dot{\omega}_k \tag{6.50.9}$$

e risolvendo per i cilindri posati sopra di esso avremo

$$\dot{\omega}_{k+1}=\frac{\beta}{R}\left(g\sin\theta-a_k\right)$$

che confrontata con la relazione valida per lo strato precedente

$$\dot{\omega}_k=\frac{\beta}{R}\left(g\sin\theta-a_{k-1}\right)$$

permette di ottenere (sottraendo membro a membro) la relazione ricorsiva

$$\dot{\omega}_{k+1}=\left(1+2\beta\right)\dot{\omega}_k$$

ossia

$$\dot{\omega}_k=\left(1+2\beta\right)^{k-1}\dot{\omega}_1=\beta\left(1+2\beta\right)^{k-1}\frac{g\sin\theta}{R}$$

che non diverge se $|1+2\beta|<1$. Di conseguenza l'unica soluzione accettabile corrisponde a $\beta=-3+\sqrt{7}$: numericamente questo significa

$$\dot{\omega}_k\simeq-0.35\times\left(0.29\right)^{k-1}\frac{g\sin\theta}{R} \tag{6.50.10}$$

cioè la accelerazioni angolari tendono a zero esponenzialmente con k. Anche le accelerazioni dei parallelepipedi si calcolano facilmente: sommando la serie geometrica (6.50.9) abbiamo

$$a_k = g\sin\theta\left[1-(1+2\beta)^{k-1}\right] \tag{6.50.11}$$

cioè $\lim_{k\to\infty} a_k = g\sin\theta$: l'accelerazione dei parallelepipedi degli strati più alti è sempre più vicina a quella di un corpo che scivola liberamente sul piano inclinato. Quelle dei parallelepipedi sottostanti sono inferiori.