PROBLEMA 6.51

Cilindro vincolato ad una molla ⋆⋆ $\mathcal{S}$

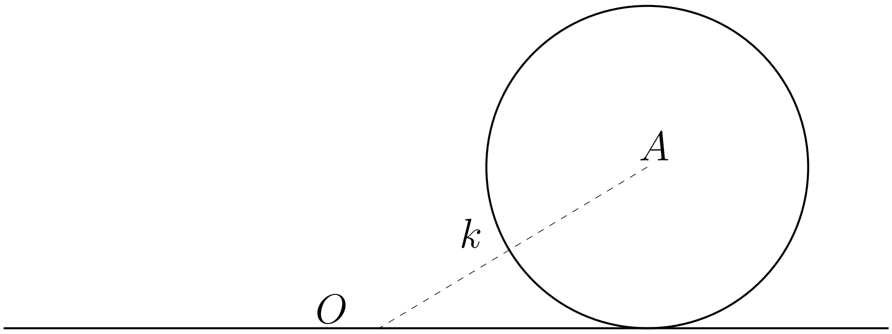

Figura 6.50.: Il cilindro vincolato da una molla, indicata dalla linea trattaggiata.

Il cilindro in Figura 6.50, di raggio R e massa M, rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Il suo centro A è fissato ad un punto O del piano da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Inizialmente A si trova sulla verticale di O.

1. Per quale valore minimo della velocità angolare iniziale il cilindro riesce a compiere un giro completo.
2. Scelta un'opportuna coordinata scrivere l'equazione del moto del cilindro.
3. Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.

Soluzione[18]

Domanda 1 L'energia del sistema si conserva e vale

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{k}{2} \ell^2$$

dove $I = \frac{3}{2} M R^2$ è il momento di inerzia del cilindro rispetto al punto di appoggio, ω la velocità angolare e ℓ la lunghezza della molla. Inizialmente

$$E_i = \frac{1}{2} I \omega_0^2 + \frac{k}{2} R^2$$

e dopo un giro completo, supponendo che il cilindro sia fermo,

$$E_f = \frac{k}{2} \left(R^2 + 4\pi^2 R^2 \right)$$

Ponendo $E_i = E_f$ troviamo

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi^2 k R^2}{I}}$$

[18] Primo esercizio scritto Fisica 1 del 10 settembre 2010

abbiamo2 Scrivendo l'energia in funzione dell'angolo di rotazione θ abbiamo

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{k}{2} \left(R^2 + R^2 \theta^2 \right)$$

ed eguagliando a zero la derivata dell'energia

$$\dot{E} = I \dot{\theta} \ddot{\theta} + k R^2 \theta \dot{\theta} = 0$$

otteniamo l'equazione del moto

$$I \ddot{\theta} + k R^2 \theta = 0$$

che corrisponde ad un oscillatore armonico.

Domanda 3 Dall'equazione del moto precedente troviamo direttamente

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kR^2}{I}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{3M}}$$

Notare che l'approssimazione di piccole oscillazioni non è necessaria, dato che il sistema è un oscillatore armonico.