PROBLEMA 6.52

Urto tra un triangolo e un quadrato ⋆⋆

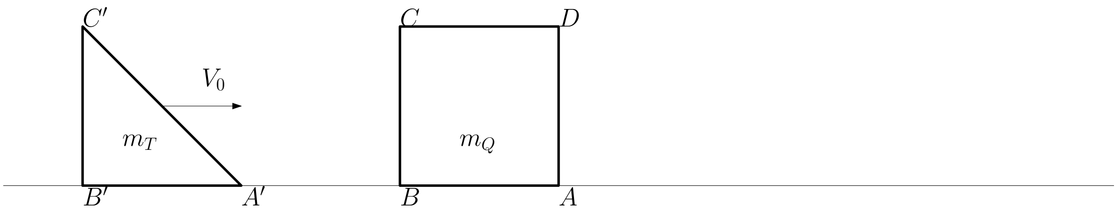

Figura 6.51.: Il triangolo e il quadrato prima dell'urto.

Un quadrato di lato a e massa m_Q è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito. Un triangolo isoscele e rettangolo di massa m_T, con cateti della stessa lunghezza del lato del quadrato, disposto come in Figura 6.51, si muove liberamente verso il quadrato con velocità iniziale v_0. L'urto avviene istantaneamente e il vertice A' del triangolo rimane vincolato al vertice B del quadrato. Il triangolo può però ruotare liberamente attorno ad $A' \equiv B$. Dire anzitutto se durante l'urto si conserva il momento angolare del sistema rispetto al polo B. Determinare quindi per quale minima velocità v_0 l'ipotenusa del triangolo arriva a contatto con un lato del quadrato.

Soluzione

Durante l'urto l'unica forza impulsiva che agisce sul triangolo è la reazione vincolare in $A' \equiv B$. Di conseguenza durante l'urto si conserva il momento angolare del triangolo rispetto a tale punto. Prima dell'urto questo vale

$$\vec{L}_i = m_T \vec{b} \wedge \vec{V}_0$$

dove $\vec{b}$ è il vettore che unisce il punto $A' \equiv B$ con il centro di massa del triangolo. Il valore di $\vec{b}$ verrà determinato nell'Esercizio 6.54.

Dopo l'urto il quadrato si muoverà con velocità V, e il triangolo ruoterà attorno al punto $A' \equiv B$ con velocità angolare ω.

Il suo momento angolare sarà dato dal contributo del centro di massa e dal momento angolare di rotazione attorno ad esso. La velocità del centro di massa del triangolo sarà

$$\vec{V}_{CM,T} = V\hat{x} + \vec{\omega} \wedge \vec{b}$$

e quindi

$$\vec{L}_f = m_T \vec{b} \wedge \vec{V}_{CM,T} + I_T \vec{\omega}$$

dove abbiamo indicato con I_T il momento di inerzia del triangolo rispetto ad un asse parallelo all'asse z passante per il suo centro di massa, che calcoleremo nell'Esercizio 6.54.

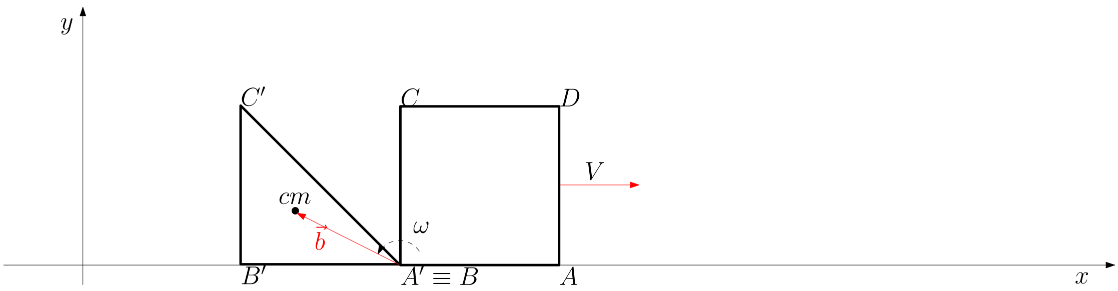

Figura 6.52.: Il triangolo e il quadrato immediatamente dopo l'urto.

Dalla conservazione segue che

$$\begin{aligned} m_T\vec{b}\wedge\vec{V}_0 &= m_T\vec{b}\wedge\left(V\hat{x}+\vec{\omega}\wedge\vec{b}\right)+I_T\vec{\omega} \\ &= m_T V\vec{b}\wedge\hat{x}+m_T\vec{b}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{b}\right)+I_T\vec{\omega} \end{aligned}$$

Inoltre si conserva la quantità di moto orizzontale del sistema, cioè

$$m_T V_0 = m_T V + m_T\left(\vec{\omega}\wedge\vec{b}\right)\cdot\hat{x}+m_Q V$$

Queste due equazioni permettono di calcolare le velocità V e $\vec{\omega}$. Calcoliamo esplicitamente i prodotti vettoriali,Utilizzando queste identità possiamo riscrivere la conservazione del momento angolare come

$$\begin{aligned} -m_T V_0 b_y &= -m_T V b_y + m_T\omega\left(b_x^2+b_y^2\right)+I_T\omega \\ m_T V_0 &= m_T V - m_T\omega b_y + m_Q V \end{aligned}$$

e risolvendo troviamo

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{b y m_Q m_T}{m_T\left[b_x^2(m_Q+m_T)+b_y^2 m_Q\right]+I_T(m_Q+m_T)}V_0 \\ V &= \frac{m_T\left(m_T b_x^2+I_T\right)}{m_T\left[b_x^2(m_Q+m_T)+b_y^2 m_Q\right]+I_T(m_Q+m_T)}V_0 \end{aligned}$$

Dato che $V\neq 0$ dopo l'urto il quadrato si muove, e quindi ha un momento angolare non nullo. Di conseguenza il momento angolare del quadrato non si è conservato (prima dell'urto è nullo) e neppure lo ha fatto quello totale del sistema. Questo significa che durante l'urto il piano orizzontale ha applicato un momento impulsivo diverso da zero al quadrato.

Dopo l'urto si conserva l'energia totale del sistema e la sua quantità di moto orizzontale. La minima velocità necessaria per avere il contatto si può determinare scrivendo l'energia iniziale nella forma

$$E_i = \frac{1}{2}m_T V_{CM,T}^2+\frac{1}{2}I_T\omega^2+\frac{1}{2}m_Q V^2+m_T g b_y$$

dove

$$
\begin{aligned}
V_{CM,T}^2 &= \left(V\hat{x} + \vec{\omega} \wedge \vec{b}\right)^2 \\
&= \left(V\hat{x} + \omega b_x \hat{y} - \omega b_y \hat{x}\right)^2 \\
&= \left(V - \omega b_y\right)^2 + \omega^2 b_x^2
\end{aligned}
$$

e ω, V sono le velocità appena determinate. L'energia al momento del contatto sarà invece la somma dell'energia cinetica del centro di massa e di quella gravitazionale

$$
E_f = \frac{1}{2}\left(m_T + m_Q\right)\left(\frac{m_T V_0}{m_T + m_Q}\right)^2 + m_T g \frac{\sqrt{2}}{2}\left(b_y + b_x\right)
$$

Dall'eguaglianza $E_i = E_f$ si determina V_0.