PROBLEMA 6.53

Cilindro vincolato ad una molla sul bordo ⋆⋆

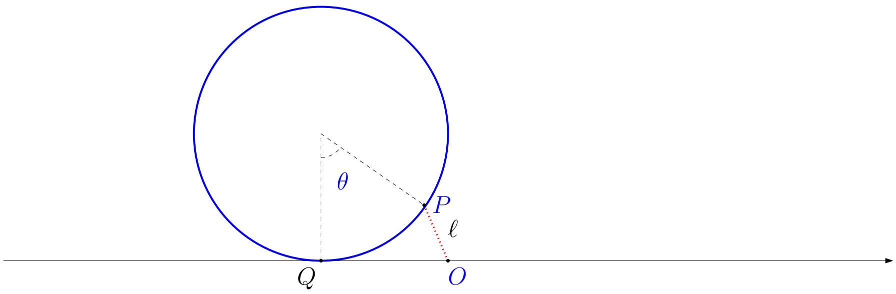

Figura 6.53.: Il cilindro vincolato è vincolato ad un moto di puro rotolamento, ed è collegato ad una molla indicata dalla linea tratteggiata.

Il cilindro in Figura 6.53, di raggio R e massa M, rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Un punto P sul bordo è fissato ad un punto O del piano da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Inizialmente P coincide con O.

1. Discutere le posizioni di equilibrio e la loro stabilità.
2. Per quale velocità angolare iniziale il cilindro riesce a fare un giro completo?.
3. Determinare le equazioni del moto del sistema. Cosa succede alla frequenza di oscillazione attorno alla posizione di equilibrio stabile nel limite di piccole oscillazioni?

Soluzione[19]

Domanda 1 Utilizzando come coordinata l'angolo di rotazione del cilindro scriviamo l'energia potenziale

$$U = \frac{1}{2}k\ell^2$$

dove ℓ è l'allungamento della molla. Si ha

$$\begin{aligned}
\ell^2 &= (R\theta - R\sin\theta)^2 + (R - R\cos\theta)^2 \\
&= 2R^2 + R^2\theta^2 - 2R^2\theta\sin\theta - 2R^2\cos\theta
\end{aligned}$$

e quindi, a meno di una costante

$$U = \frac{1}{2}kR^2\left(\theta^2 - 2\theta\sin\theta - 2\cos\theta\right)$$

[19] Primo esercizio scritto Fisica 1 del 10 settembre 2010

Troviamo i punti stazionari. Derivando otteniamo

$$U' = kR^2\theta\left(1 - \cos\theta\right)$$

e quindi si ha equilibrio per

$$\theta = 2m\pi$$

dove m è un intero. Studiamo la stabilità, derivando ancora una volta:

$$U'' = kR^2\left(1 - \cos\theta + \theta\sin\theta\right)$$

che si annulla nei punti di equilibrio. Derivando ulteriormente abbiamo

$$U''' = kR^2\left(\theta\cos\theta + 2\sin\theta\right)$$

che calcolata nei punti di equilibrio da

$$U''' = 4kR^2m\pi$$

Abbiamo dei flessi orizzontali (equilibrio instabile) per $\theta = 2m\pi$ con $m \neq 0$. Per $\theta = 0$ ($m = 0$) serve ancora una derivata. Abbiamo

$$U'''' = kR^2\left(3\cos\theta - t\sin\theta\right)$$

e quindi un minimo (equilibrio stabile) per $\theta = 0$.

Domanda 2 L'energia si conserva, e vale

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kR^2\left(\theta^2 - 2\theta\sin\theta - 2\cos\theta\right)$$

Inoltre il potenziale è una funzione non decrescente di θ per $\theta > 0$. Eguagliando energia iniziale e finale abbiamo quindi

$$\frac{1}{2}I\omega^2 - kR^2 = kR^2\left(2\pi^2 - 1\right)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{4\pi^2kR^2}{I}} \\ &= \sqrt{\frac{8\pi^2}{3}\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto del fatto che $I = \frac{3}{2}mR^2$ è il momento d'inerzia del cilindro rispetto al suo asse di rotazione istantaneo.

Domanda 3 L'equazione del moto si può ottenere rapidamente derivando l'energia. Si trova

$$I\ddot{\theta} + kR^2\theta\left(1 - \cos\theta\right) = 0$$

Per piccole oscillazioni possiamo approssimare $1 - \cos\theta \simeq \theta^2/2$ e l'equazione diventa

$$I\ddot{\theta} + \frac{kR^2}{2}\theta^3 = 0$$

Non si tratta di un'oscillazione armonica. Per studiare il periodo di oscillazione consideriamo nuovamente l'energia.

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kR^2\left(\theta^2 - 2\theta\sin\theta - 2\cos\theta\right)$$

Per piccoli valori di θ possiamo approssimare

$$\begin{aligned}
\sin\theta &\simeq \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + O\left(\theta^5\right) \\
\cos\theta &\simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 + O\left(\theta^6\right)
\end{aligned}$$

Si deve andare oltre l'approssimazione al secondo ordine dato che i termini del secondo ordine, come si verificherà tra un momento, si cancellano. Sostituendo abbiamo, a meno di una costante irrilevante,

$$E \simeq \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{8}kR^2\theta^4$$

e le piccole oscillazioni si hanno per $E \to 0$. Possiamo scrivere

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2E}{I} - \frac{kR^2}{4I}\theta^4}$$

che si integra per separazione delle variabili

$$\int_0^t dt = \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2E}{I} - \frac{kR^2}{4I}\theta^4}}$$

Scegliendo come angolo iniziale $\theta(0) = 0$ e come angolo finale l'estremo dell'oscillazione l'integrale al primo membro da un quarto del periodo. Quanto all'estremo dell'oscillazione, si tratta dell'angolo che annulla il termine sotto radice, cioè

$$\theta_{max} = \left(\frac{8E}{kR^2}\right)^{1/4}$$

e quindi

$$\frac{T}{4} = \int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2E}{I} - \frac{kR^2}{4I}\theta^4}}$$

Usando la nuova variabile $u = \theta/\theta_{max}$ l'integrale diventa

$$\frac{T}{4} = \left(\frac{2I^2}{kR^2E}\right)^{1/4} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$$

L'integrale è una costante indipendente da E che non è importante calcolare, e vediamo che

$$\lim_{E\to 0} T = \infty$$

quindi per piccole oscillazioni la frequenza tende a zero.