PROBLEMA 6.54

Centro di massa e momento di inerzia di un triangolo ⋆⋆

Determinare la posizione del centro di massa di un triangolo di lati a, b e c qualsiasi. Se il triangolo ha una massa totale m distribuita in modo omogeneo trovare il momento di inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa e ortogonale al piano a cui il triangolo appartiene. Specializzare il risultato ottenuto per determinare il vettore $\vec{b}$ e il momento di inerzia I_T definiti nell'Esercizio 6.52.

Soluzione

Indichiamo con $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$ e $\vec{r}_C$ i vettori corrispondenti alle posizioni dei tre vertici del triangolo. Per comodità conviene introdurre anche i due vettori

$$
\begin{aligned}
\vec{AB} &= \vec{r}_B - \vec{r}_A \\
\vec{AC} &= \vec{r}_C - \vec{r}_A
\end{aligned}
$$

L'area totale del triangolo è data da

$$
S = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right|
$$

e un qualsiasi punto del triangolo sarà parametrizzabile nella forma

$$
\vec{r}(s,t) = \vec{r}_A + s\vec{AB} + t\vec{AC}
$$

con $s + t \le 1$. Calcoliamo anzitutto il centro di massa. Applicando direttamente la definizione abbiamo

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_{CM} &= \frac{1}{m}\int \rho\vec{r}(s,t)dS \\
&= \vec{r}_A + \frac{1}{m}\frac{2m}{\left|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right|}\int_0^1 dt \int_0^{1-t} ds \left|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right| \vec{r}(s,t)
\end{aligned}
$$

dove si è tenuto conto del fatto che l'elemento di superficie è

$$
dS = \left|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right| dsdt
$$

e si è indicato con ρ la densità superficiale di massa. Scriviamo esplicitamente l'integrale:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{CM} &= \vec{r}_A + 2\int_0^1 dt \int_0^{1-t} ds \left[s\vec{AB} + t\vec{AC}\right] \\
&= \vec{r}_A + 2\int_0^1 dt \int_0^{1-t} ds \left[t\vec{AB} + t\vec{AC}\right] \\
&= \vec{r}_A + 2\left[\vec{AB} + \vec{AC}\right]\int_0^1 dt\, t(1-t) \\
&= \vec{r}_A + \frac{1}{3}\left[\vec{AB} + \vec{AC}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C\right)
\end{aligned}$$

Per semplificare i calcoli si è tenuto conto del fatto che l'integrale non non varia scambiando tra loro s e t nell'integrando. Si tratta del baricentro del triangolo.

Calcoliamo adesso il momento di inerzia. Abbiamo

$$\begin{aligned}
I_{CM} &= \int \rho dS\, (\vec{r} - \vec{r}_{CM})^2 \\
&= 2m\int_0^1 dt \int_0^{1-t} ds \left(\vec{r}_A + s\vec{AB} + t\vec{AC} - \vec{r}_A - \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}\right)^2 \\
&= 2m\int_0^1 dt \int_0^{1-t} ds \left[\left(s - \frac{1}{3}\right)\vec{AB} + \left(t - \frac{1}{3}\right)\vec{AC}\right]^2 \\
&= 2m\int_0^1 dt \int_0^{1-t} ds \left[\left(s - \frac{1}{3}\right)^2 \left|\vec{AB}\right|^2 + \left(t - \frac{1}{3}\right)^2 \left|\vec{AC}\right|^2\right. \\
&\left. + 2\left(s - \frac{1}{3}\right)\left(t - \frac{1}{3}\right)\vec{AB}\cdot\vec{AC}\right]
\end{aligned}$$

I due integrali rilevanti (sfruttando ancora la possibilità di scambiare s e t nell'integrando) valgono

$$\int_0^1 dt \int_0^{1-t} ds \left(t - \frac{1}{3}\right)^2 = \int_0^1 dt\, (1-t)\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

$$\int_0^1 dt \int_0^{1-t} ds \left(s - \frac{1}{3}\right)\left(t - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}\int_0^1 dt\, (1-t)\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{1}{72}$$

e quindi

$$I_{CM} = \frac{m}{18}\left(\left|\vec{AB}\right|^2 + \left|\vec{AC}\right|^2 - \vec{AB}\cdot\vec{AC}\right)$$

Possiamo anche scrivere

$$I_{CM} = \frac{m}{18}\left[\frac{1}{2}\left(\left|\vec{AB}\right|^2 + \left|\vec{AC}\right|^2\right) + \frac{1}{2}\left(\left|\vec{AB}\right|^2 + \left|\vec{AC}\right|^2 - 2\vec{AB}\cdot\vec{AC}\right)\right]$$

ed usando il teorema di Carnot otteniamo infine

$$I_{CM} = \frac{m}{36}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

Applicando questi risultati all'Esercizio 6.52 otteniamo

$$\begin{aligned}
\vec{b} = \vec{r}_{CM} - \vec{r}_{A'} &= \frac{1}{3}\left(\vec{r}_{B'} + \vec{r}_{C'} - 2\vec{r}_{A'}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\vec{r}_{B'} - \vec{r}_{A'}\right) + \frac{1}{3}\left(\vec{r}_{C'} - \vec{r}_{A'}\right) \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{a}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
I_T &= I_{CM} + m_T \left|\vec{b}\right|^2 \\
&= m_T \frac{a^2}{9} + m_T \frac{5a^2}{9} \\
&= \frac{2}{3} m_T a^2
\end{aligned}$$

dove a e m_T sono i parametri definiti nell'esercizio.