PROBLEMA 6.55

Urto con una sbarra incastrata ⋆⋆

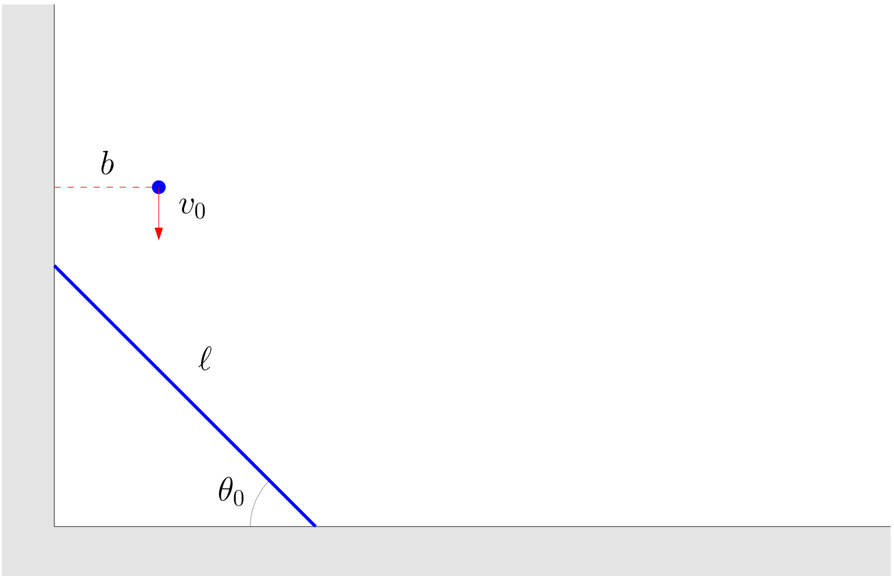

Figura 6.54.: La sbarra appoggiata ad un angolo tra due pareti.

Una sbarra di lunghezza ℓ e massa m è appoggiata su un piano orizzontale privo di attrito. I suoi due estremi sono appoggiati a due pareti perpendicolari tra di loro come in Figura 6.54, non si possono staccare da queste ma possono scorrervi sopra liberamente.

La sbarra è inizialmente ferma ed inclinata di $\theta_0 = \pi/4$ rispetto all'orizzontale.

Un punto materiale di massa m' si muove parallelamente ad una delle due pareti ad una distanza b da essa, come in Figura, con velocità v_0 in modulo. Ad un certo istante colpisce la sbarra e rimane attaccata ad essa. Calcolate la velocità angolare del sistema asta+massa

- ◦ immediatamente dopo l'urto
- ◦ negli istanti successivi, in funzione dell'angolo θ di inclinazione rispetto all'orizzontale

Soluzione

Le forze esterne che agiscono sul sistema sono le reazioni normali delle pareti. Se prendiamo come polo l'intersezione tra le rette perpendicolari alle pareti nei punti di contatto con la sbarra vediamo che entrambe le reazioni hanno momento nullo, di conseguenza si conserva il momento angolare. Ponendo l'origine nell'intersezione tra le due pareti il polo si trova nel punto di coordinate

$$(x,y,z) = (\ell\cos\theta_0, \ell\sin\theta_0, 0) = \left(\ell\frac{\sqrt{2}}{2}, \ell\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

abbiamo prima dell'urto

$$\vec{L}_i = -m'\left(b-\ell\cos\theta_0\right)v_0\hat{z} = -m'\left(b-\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\right)v_0\hat{z}$$

ed immediatamente dopo

$$\vec{L}_f = I_0\omega_0\hat{z}$$

dove I_0 è il momento di inerzia del sistema rispetto al polo prescelto. Tenendo conto che la massa rimane attaccata alla sbarra ad una distanza $d = b/(\cos\theta_0)$ dal suo estremo abbiamo

$$\begin{aligned}
I_0 &= m\frac{\ell^2}{12} + m\frac{\ell^2}{4} + m'\left[\left(\ell\cos\theta_0 - b\right)^2 + b^2\tan^2\theta_0\right] \\
&= m\frac{\ell^2}{12} + m\frac{\ell^2}{4} + m'\left[\left(\ell\frac{\sqrt{2}}{2} - b\right)^2 + b^2\right]
\end{aligned}$$

Di conseguenza la velocità angolare immediatamente dopo l'urto sarà

$$\boxed{\omega_0 = -\frac{m'\left(b-\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{I_0}v_0}$$

In seguito si conserva l'energia cinetica del sistema, che scriveremo nella forma

$$E = \frac{1}{2}I(\theta)\omega^2 = \frac{1}{2}I_0\omega_0^2$$

Adesso $I(\theta)$ è il momento di inerzia del sistema rispetto al suo asse di rotazione istantaneo. Ma quest'ultimo coincide con l'intersezione tra le rette perpendicolari alle pareti nei punti di contatto (e quindi inizialmente $I = I_0$). In altre parole

$$I(\theta) = m\frac{\ell^2}{12} + m\frac{\ell^2}{4} + m'\left[\left(\ell\cos\theta - b\frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}\right)^2 + \left(b\frac{\sin\theta}{\cos\theta_0}\right)^2\right]$$

e quindi

$$\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{\frac{I_0}{I(\theta)}}}$$