PROBLEMA 6.56

Urto anelastico contro un pendolo fisico ⋆⋆

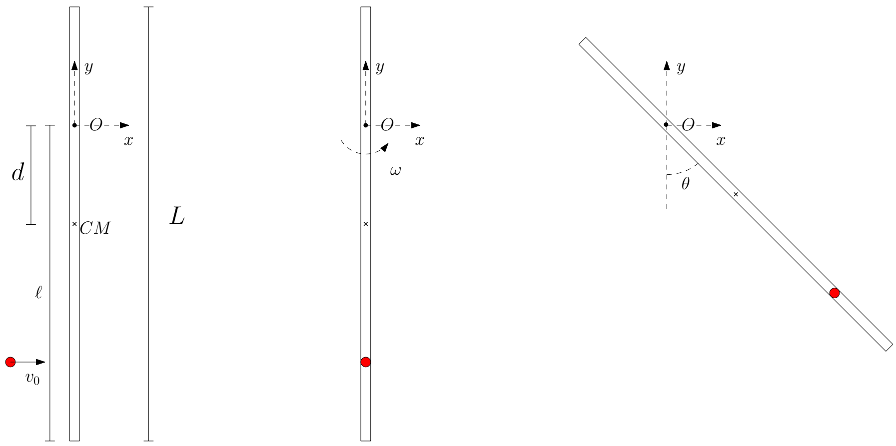

Figura 6.55.: Il pendolo fisico considerato nel problema, prima dell'urto (a sinistra) immediatamente dopo (al centro) e alla massima inclinazione raggiunta (a destra).

Un'asta di lunghezza L e massa M può ruotare liberamente attorno ad un punto posto ad una distanza $d < L/2$ dal suo centro di massa. Inizialmente si trova in equilibrio in posizione verticale. Una massa m colpisce l'asta al di sotto del punto di sospensione, ad una distanza ℓ da esso, con velocità v_0 diretta orizzontalmente, e rimane attaccata. Per quale valore minimo di v_0 l'asta inizia a ruotare? (vedere Figura 6.55).

Soluzione

Dato che durante l'urto l'unica forza impulsiva che agisce sul sistema è la reazione vincolare al punto di sospensione O, il momento angolare del sistema rispetto ad esso si conserva. Il momento angolare immediatamente prima dell'urto è quello della massa,

$$\vec{L}_i = m\left[-\ell\hat{y}\right] \wedge (v_0\hat{x}) = m\ell v_0\hat{z}$$

Dopo l'urto abbiamo un unico corpo rigido che ruota attorno al punto di sospensione con velocità angolare

$$\vec{\omega} = \omega\hat{z}$$

quindi il momento angolare finale sarà

$$\vec{L}_f = I\omega\hat{z}$$

dove $I\hat{z}$ e passante per O, $I = I_{massa} + I_{asta}$ e

$$\begin{aligned} I_{massa} &= m\ell^2 \\ I_{asta} &= \frac{1}{12}ML^2 + Md^2 \end{aligned}$$

Dalla conservazione $\vec{L}_f = \vec{L}_i$ otteniamo la velocità angolare

$$\omega = \frac{m}{I}\ell v_0 \tag{6.56.1}$$

Dopo l'urto la conservazione del momento angolare non è più valida a causa del momento della forza di gravità. Si conserva però l'energia, che inizialmente (immediatamente dopo l'urto) varrà

$$E_i = \frac{1}{2}I\omega^2 - Mgd - mg\ell$$

Quando θ raggiunge il suo valore massimo ($\theta = \pi$) avremo $\omega = 0$, quindi

$$E_f = Mgd + mg\ell$$

e da $E_i = E_f$ otteniamo

$$\omega^2 = 4\frac{Mgd + mg\ell}{I}$$

cioè, sostituendo la (6.56.1)

$$v_0^2 = \frac{4Ig}{m^2}\frac{Md + m\ell}{\ell^2}$$

ed infine

$$v_0 = \sqrt{\frac{4g}{\ell^2}\left(\ell + \frac{M}{m}d\right)\left[\ell^2 + \frac{M}{m}\left(\frac{1}{12}L^2 + d^2\right)\right]}$$