PROBLEMA 6.57

Tre cilindri in equilibrio ⋆⋆

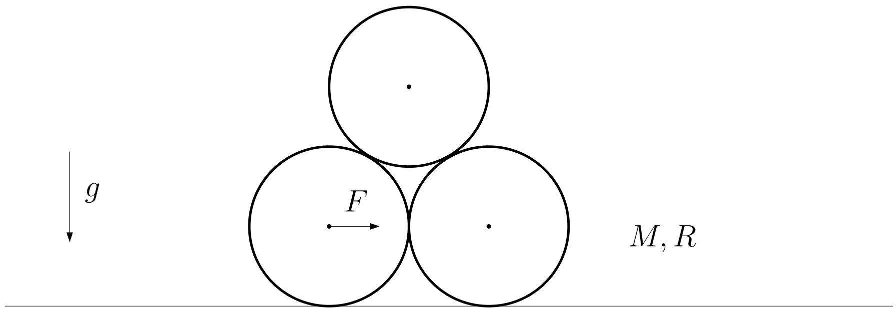

Figura 6.56.: I tre cilindri in contatto considerati nel problema.

Tre cilindri identici di massa M e raggio R sono disposti come in Figura 6.56 su un piano orizzontale privo di attrito. Al centro di massa del cilindro in basso a sinistra è applicata una forza costante F. Determinare per quali valori di F il sistema accelera come un tutto unico mantenendo invariate le posizioni relative dei cilindri.

Soluzione

Sappiamo che i tre cilindri devono avere la stessa accelerazione. Consideriamoli separatamente. Per quello in basso a sinistra avremo lungo la direzione orizzontale

$$Ma = F - N_1 - \frac{1}{2}N_3$$

e per quello in basso a destra

$$Ma = N_1 + \frac{1}{2}N_2$$

Per il cilindro in alto varranno le due equazioni

$$\begin{aligned} Ma &= \frac{1}{2}N_3 - \frac{1}{2}N_2 \\ 0 &= \frac{\sqrt{3}}{2}N_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}N_3 - Mg \end{aligned}$$

Con N_1, N_2 e N_3 abbiamo indicato le forze di contatto che i cilindri esercitano reciprocamente, scelte come in Figura 6.57.

L'accelerazione si calcola facilmente sommando membro a membro le prime tre equazioni. Il risultato è

$$a = \frac{F}{3M}$$

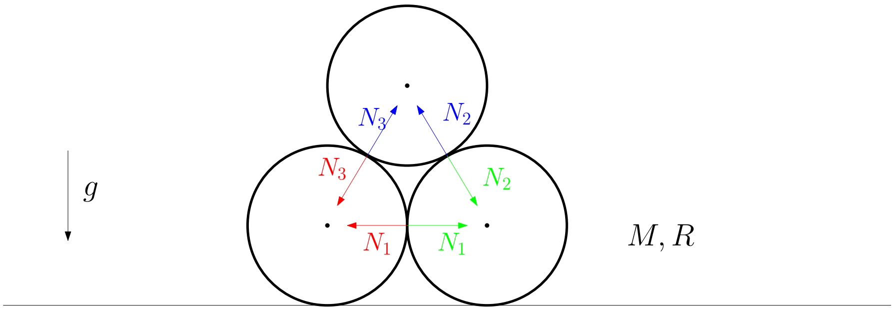

Figura 6.57.: La convenzione scelta per le forze di contatto. In rosso sono indicate le forze applicate al cilindro in basso a sinistra, in verde quelle applicate al cilindro in basso a destra, in blu quelle applicate al cilindro in alto.

come era facile anticipare considerando il moto del centro di massa del sistema. Sottraendo membro a membro otteniamo dalle prime tre equazioni e dall'ultima il sistema

$$\begin{aligned}
2N_1 + \frac{1}{2}N_2 + \frac{1}{2}N_3 &= F \\
N_1 + N_2 - \frac{1}{2}N_3 &= 0 \\
\frac{\sqrt{3}}{2}N_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}N_3 &= Mg
\end{aligned}$$

che ha per soluzione

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{2}F - \frac{1}{2\sqrt{3}}Mg \\
N_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}Mg - \frac{1}{3}F \\
N_3 &= \frac{1}{3}F + \frac{1}{\sqrt{3}}Mg
\end{aligned}$$

Il segno delle forze di contatto è riassunto nel diagramma 6.58 al variare di F.

Dato che queste possono essere nella situazione considerata solo positive vediamo che le posizioni relative possono rimanere invariate solo per

$$\frac{Mg}{\sqrt{3}} < F < Mg\sqrt{3}$$

che corrisponde all'intervallo di possibili accelerazioni

$$\frac{g}{3\sqrt{3}} < a < \frac{1}{\sqrt{3}}g$$

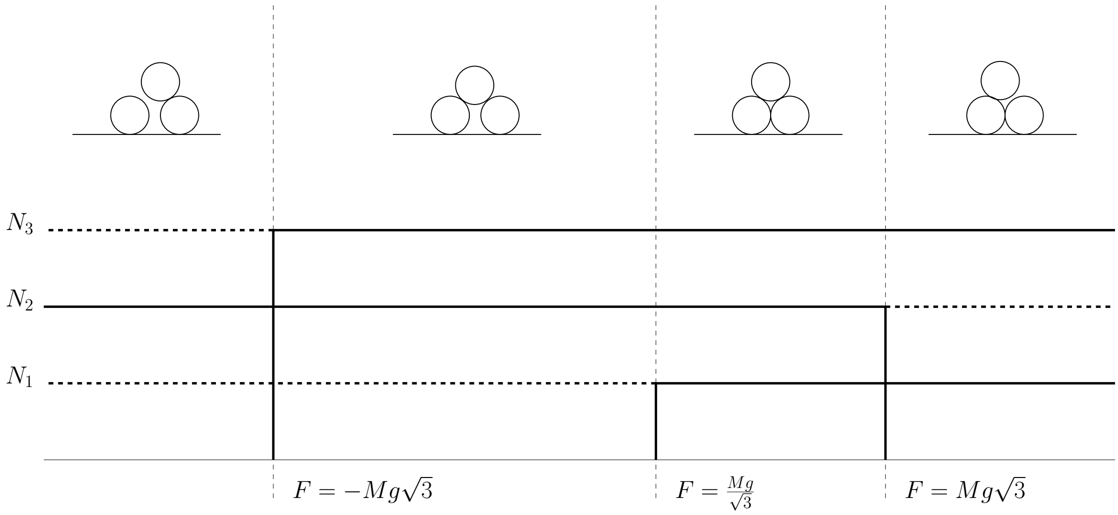

Figura 6.58.: Il segno delle reazioni normali al variare di F. Le posizioni relative rimangono invariate solo nell'intervallo $Mg/\sqrt{3} < F < Mg\sqrt{3}$. In tutti gli altri casi almeno una delle reazioni N_i diviene negativa, segnalando che i cilindri perdono contatto nel modo indicato.

