PROBLEMA 6.59

Tiro al piattello ⋆⋆

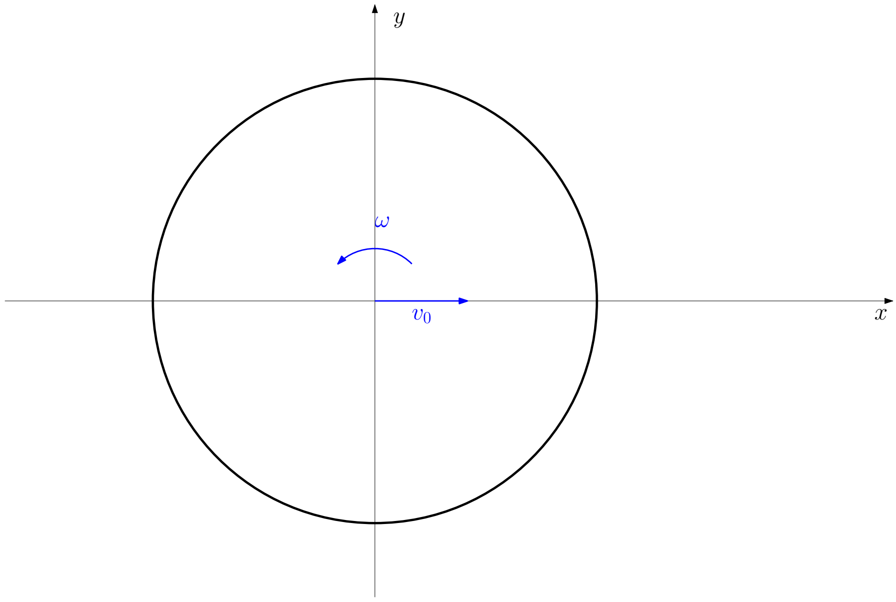

Figura 6.59.: Il disco del problema, in un sistema di riferimento con origine nel suo centro.

Un disco di massa M e raggio R si muove liberamente su un piano orizzontale $z = 0$. La velocità del centro di massa è $\vec{v} = v_0\hat{x}$, la velocità angolare $\vec{\omega} = \lambda v_0/R\hat{z}$. Con una apposita pistola si vuole trapassare il disco con un chiodo. Dopo che questo è avvenuto il disco rimane vincolato e può solo ruotare attorno al chiodo, che rimane infisso nel piano.

Determinare (se possibile) quale punto del disco è necessario trapassare per un dato valore del parametro λ se si vuole che

1. Su disco perda tutta l'energia cinetica posseduta;
2. il disco conservi tutta l'energia cinetica posseduta.

Soluzione

Una quantità che si conserva durante l'impatto con il chiodo è il momento angolare rispetto al punto in cui questo viene infisso. Fissiamo un sistema di riferimento con origine nella posizione del centro del disco al momento dell'impatto. Il momento angolare rispetto a un punto generico posto in

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$$

è dato prima dell'urto da

$$\begin{aligned}\vec{L} &= m\left(-\vec{r}\right)\wedge\left(\vec{v}\right)+\frac{1}{2}mR^2\vec{\omega}\\ &= -m\left(x\hat{x}+y\hat{y}\right)\wedge\left(v_0\hat{x}\right)+\frac{1}{2}mR\lambda v_0\hat{z}\\ &= mv_0\left(y+\frac{\lambda}{2}R\right)\hat{z}\end{aligned}$$

1. Se tutta l'energia cinetica viene persa, allora dopo l'urto $\vec{L}=0$. Ma allora anche il momento angolare iniziale sarà nullo, e questo accade se

$$y=-\frac{\lambda}{2}R$$

mentre x può essere scelto arbitrariamente. Potremo dunque fermare completamente il disco con il chiodo per $-2<\lambda<2$.

2. Affinchè tutta l'energia cinetica si conservi dovremo evitare che la reazione del chiodo nel momento in cui viene infisso faccia lavoro. Colpiremo quindi il disco nel punto fermo in quell'istante. La velocità di un punto generico sarà

$$\begin{aligned}\vec{V}\left(\vec{r}\right) &= \vec{v}+\vec{\omega}\wedge\vec{r}=v_0\hat{x}+\left(\lambda\frac{v_0}{R}\hat{z}\right)\wedge\left(x\hat{x}+y\hat{y}\right)\\ &= v_0\left(1-\lambda\frac{y}{R}\right)\hat{x}+\lambda\frac{v_0}{R}x\hat{y}\end{aligned}$$

e quindi dovremo scegliere

$$\begin{aligned}x &= 0\\ y &= \frac{R}{\lambda}\end{aligned}$$

Questo sarà possibile per $-1<\lambda<1$.2