

PROBLEMA 6.63

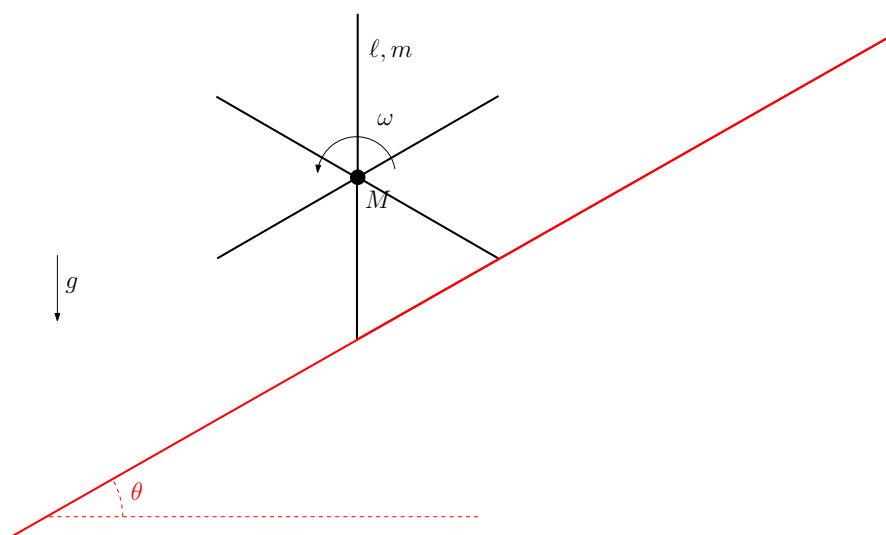
**Caduta di una ruota esagonale lungo un pendio \*\*\***

Figura 6.64.: La struttura considerata nel problema. La forma è quella di un esagono regolare.

La struttura rigida esagonale rappresentata in Figura 6.64 è costituita da sei aste identiche di lunghezza  $\ell$  e massa  $m$ , e da una massa  $M$  fissata nel centro. Viene lanciata con velocità angolare iniziale  $\omega_0$  su un piano inclinato dalla posizione in Figura 6.64. Nel momento in cui una delle aste tocca il suolo rimane vincolata ad esso, ma libera di ruotare, mentre la gamba vincolata precedentemente si libera.

Studiare, al variare di  $\omega_0$  e degli altri parametri del problema, la caduta della struttura. Dire in particolare se esistono condizioni nelle quali la caduta ha termine, condizioni nelle quali la velocità angolare cresce senza limite, e condizioni nelle quali si stabilizza.

**Soluzione**

Nel seguito indicheremo con  $\mu = M + 6m$  la massa totale della struttura, e con

$$I = 6m \frac{\ell^2}{3} = 2m\ell^2$$

il suo momento di inerzia rispetto al suo centro di massa.

Consideriamo la caduta come successione di rotazioni di  $\pi/3$  della struttura. Osserviamo che ad ogni passo l'energia potenziale gravitazionale varia di

$$\Delta U = -\mu g \ell \sin \theta$$

Fino al momento del nuovo contatto della struttura con il piano inclinato si conserva l'energia totale. Invece al momento del contatto, che considereremo istantaneo, si conserva il momento angolare rispetto ad un polo posto nel nuovo punto di appoggio, se supponiamo che non vi siano forze impulsive che agiscono su  $P$ .

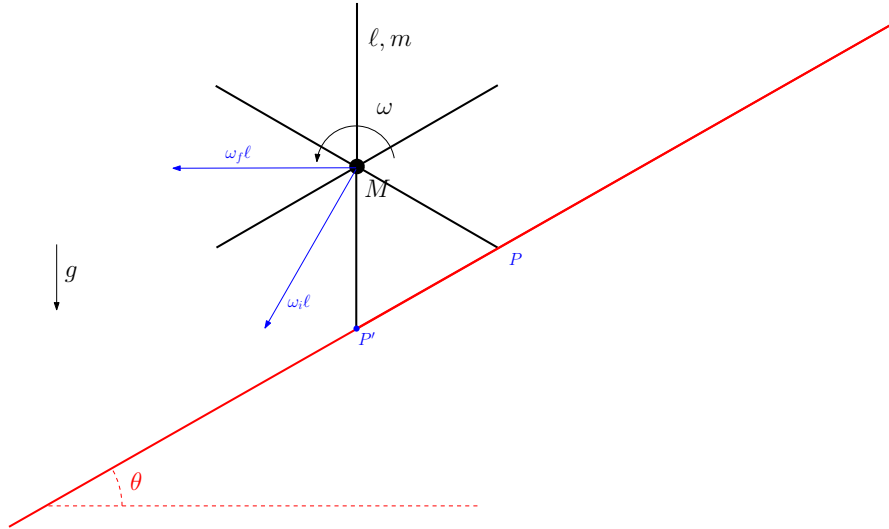


Figura 6.65.: La costruzione utilizzata per raccordare la velocità angolare della struttura tra l'istante immediatamente precedente e quello immediatamente seguente il momento del contatto con il punto  $P$ . I vettori azzurri indicano le velocità del centro di massa, prima e dopo il contatto.

Possiamo utilizzare questo fatto per calcolare la variazione della velocità angolare. Facendo riferimento alla Figura 6.65 vediamo che immediatamente prima del contatto la struttura sta ruotando attorno al punto di appoggio precedente  $P$ . Il momento angolare rispetto a  $P'$  immediatamente prima del contatto vale quindi

$$L_i = I\omega_i + \mu\ell^2\omega_i \sin \frac{\pi}{6} = \left( I + \frac{1}{2}\mu\ell^2 \right) \omega_i$$

Subito dopo, la struttura ruota attorno a  $P'$ , con un momento angolare

$$L_f = I\omega_f + \mu\ell^2\omega_f = (I + \mu\ell^2) \omega_f$$

Uguagliando queste due espressioni troviamo

$$\omega_i = \frac{I + \mu\ell^2}{I + \frac{1}{2}\mu\ell^2} \omega_f$$

In conclusione detta  $\omega_n$  la velocità angolare immediatamente dopo il contatto  $n$ -simo avremo

$$\frac{1}{2} (I + \mu\ell^2) \left( \frac{I + \mu\ell^2}{I + \frac{1}{2}\mu\ell^2} \right)^2 \omega_{n+1}^2 = \frac{1}{2} (I + \mu\ell^2) \omega_n^2 - \Delta U$$

e quindi

$$\omega_{n+1}^2 = \left( \frac{I + \frac{1}{2}\mu\ell^2}{I + \mu\ell^2} \right)^2 \left[ \omega_n^2 - \frac{2\Delta U}{I + \mu\ell^2} \right]$$

$$\omega_{n+1}^2 = \lambda (\omega_n^2 + \beta) \quad (6.63.1)$$

con

$$\lambda = \left( \frac{I + \frac{1}{2}\mu\ell^2}{I + \mu\ell^2} \right)^2 < 1$$

$$\beta = \frac{2\mu g \ell \sin \theta}{I + \mu\ell^2}$$

Cerchiamo adesso un eventuale soluzione della (6.63.1) del tipo  $\omega_n = \bar{\omega}$ . Queste saranno determinate da

$$\bar{\omega}^2 = \lambda (\bar{\omega}^2 + \beta)$$

ossia

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\lambda\beta}{1-\lambda}$$

Poniamo adesso

$$\omega_n^2 = \bar{\omega}^2 + \delta_n$$

e sostituiamo nella (6.63.1) ottenendo

$$\delta_{n+1} = \lambda\delta_n$$

da cui

$$\delta_n = \lambda^n \delta_0$$

In conclusione possiamo scrivere la soluzione generale nella forma

$$\omega_n^2 = \omega_n^2 - \bar{\omega}^2 + \bar{\omega}^2 = \delta_n + \bar{\omega}^2 = \lambda^n (\omega_0^2 - \bar{\omega}^2) + \bar{\omega}^2$$

Vediamo quindi che, indipendentemente dal valore di  $\omega_0$ , le velocità angolari immediatamente dopo l'appoggio si stabilizzano al valore

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{4g \sin \theta}{\ell} \frac{(I + \frac{1}{2}\mu\ell^2)}{\sqrt{(2I + \frac{3}{2}\mu\ell^2)(I + \mu\ell^2)}}$$

In realtà è necessario imporre un'ulteriore condizione:  $\omega_n$  deve essere abbastanza grande da permettere alla struttura una rotazione completa di  $\pi/3$ . Questo accade certamente se

$$\theta + \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{2}$$

in caso contrario l'energia cinetica deve essere sufficiente a portare il centro di massa sulla verticale della posizione di appoggio, cioè

$$\frac{1}{2} (I + \mu \ell^2) \omega_n^2 > \mu g \ell \left[ 1 - \sin \left( \theta + \frac{\pi}{3} \right) \right]$$

ossia

$$\omega_n > \omega^* \equiv \sqrt{\frac{4g \sin \theta}{\ell}} \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \mu \ell^2}{I + \mu \ell^2}} \sqrt{\frac{1 - \sin \left( \theta + \frac{\pi}{3} \right)}{\sin \theta}}$$

Se  $\omega_n < \omega^*$  la velocità angolare cambia segno. La nuova velocità angolare immediatamente dopo il contatto sarà data da

$$\omega_{n+1}^2 = \lambda^2 \omega_n^2$$

e quindi tenderà a zero.

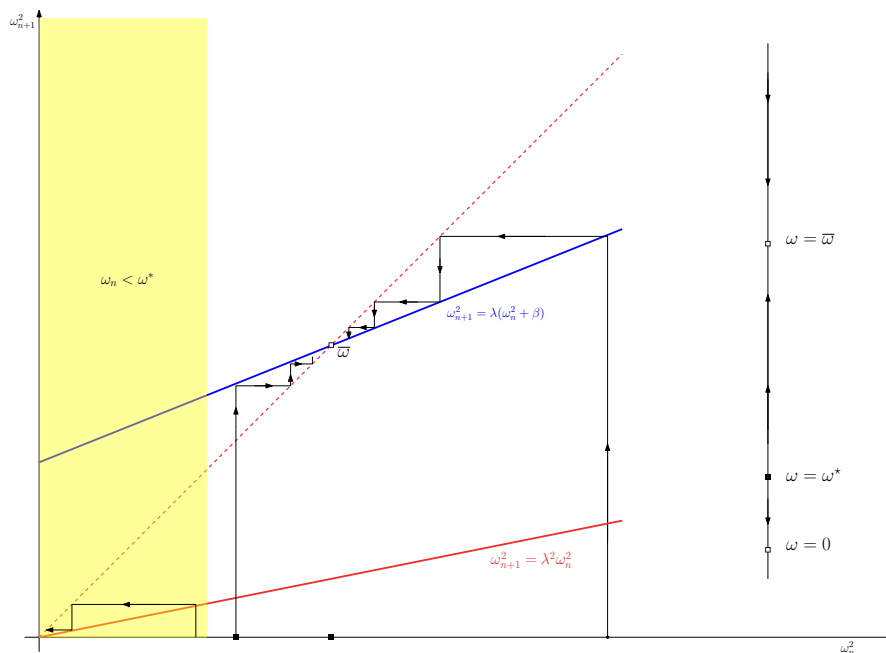


Figura 6.66.: Studio grafico della relazione ricorsiva (6.63.1). Per valori iniziali della velocità angolare maggiori di  $\omega^*$  si ha convergenza verso  $\bar{\omega}$ , che è quindi un punto fisso "attrattivo". Per  $\omega < \omega^*$  (la fascia gialla) la velocità angolare tende invece verso 0, un altro punto fisso attrattivo.  $\omega^*$  è un punto fisso "repulsivo".

La situazione è riassunta nel diagramma in Figura 6.66.