PROBLEMA 6.65

Urto di un settore cilindrico ★★

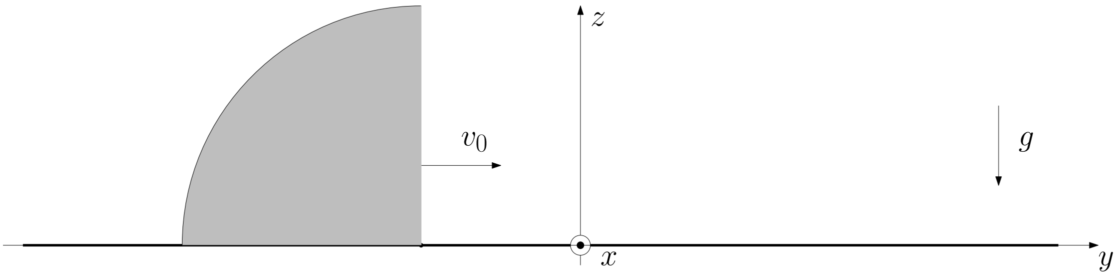

Figura 6.69.: Il settore cilindrico in moto prima dell'urto con l'ostacolo.

In un sistema di riferimento scelto come in Figura 6.69 un settore cilindrico di massa M si muove con velocità costante $\vec{v} = v_0\hat{y}$ su un piano orizzontale privo di attrito, in presenza di un campo di gravità uniforme $\vec{g} = -g\hat{z}$ (vedere Figura 6.69). L'ampiezza angolare del settore è $\theta = \pi/2$ e il raggio R. Ad un certo momento esso urta contro un ostacolo posto sull'asse x. Il settore può adesso ruotare liberamente attorno al suo asse, che rimane vincolato all'ostacolo. Nel seguito si può indicare con d la distanza del centro di massa del settore dal suo asse, che vale

$$d = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}R$$

1. Trovare una quantità conservata durante l'urto, motivando la risposta, e calcolarne il valore iniziale in funzione dei parametri del problema.
2. Calcolare le componenti dell'impulso esercitato dall'ostacolo durante l'urto.
3. Per quali valori di v_0 il settore si capovolge?

Soluzione

Domanda 1

Scegliendo un polo sull'asse x vediamo che si conserva la componente parallela ad esso del momento angolare. Infatti durante l'urto l'unica forza rilevante è la reazione impulsiva dell'ostacolo, che non ha momento. Inoltre dato che il corpo può ruotare liberamente attorno all'asse x il vincolo non può applicare momenti paralleli ad esso.

Dato che inizialmente il parallelepipedo ha solo un moto di traslazione il valore iniziale di questa quantità sarà

$$L_x = -Mv_0d\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Domanda 2

Dalla conservazione di L_x segue che dopo l'urto il settore ruota attorno all'asse x con velocità angolare data da

$$-Mv_0 d\frac{\sqrt{2}}{2} = I\omega$$

dove $I = \frac{1}{2}MR^2$ è il suo momento di inerzia rispetto all'asse specificato. Segue che

$$\omega = -\frac{v_0 d}{R^2}\sqrt{2}$$

e il centro di massa del settore avrà una velocità

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{CM} &= \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \omega\hat{x} \wedge \left(-d\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} + d\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}d\omega\left(-\hat{x}\wedge\hat{y} + \hat{x}\wedge\hat{z}\right) \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}d\omega\left(\hat{z}+\hat{y}\right) \\
&= v_0\frac{d^2}{R^2}\left(\hat{z}+\hat{y}\right)
\end{aligned}$$

La variazione della quantità di moto durante l'urto è uguale all'impulso cercato, e quindi

$$\vec{I} = M\vec{v}_{CM} - Mv_0\hat{y} = Mv_0\frac{d^2}{R^2}\hat{z} + Mv_0\left(\frac{d^2}{R^2}-1\right)\hat{y}$$

Domanda 3

Dopo l'urto si conserva l'energia, e per ottenere il capovolgimento il centro di massa del settore dovrà arrivare sulla verticale dell'origine, ad una altezza d. Confrontando l'energia in questa situazione con quella immediatamente dopo l'urto abbiamo la condizione

$$Mgd < \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgd\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Inserendo il valore di ω determinato precedentemente troviamo

$$\frac{2v_0^2 d^2}{R^4} > \frac{2gd}{R^2}\left(2-\sqrt{2}\right)$$

e quindi

$$v_0 > R\sqrt{\frac{g}{d}\left(2-\sqrt{2}\right)}$$