

PROBLEMA 6.67

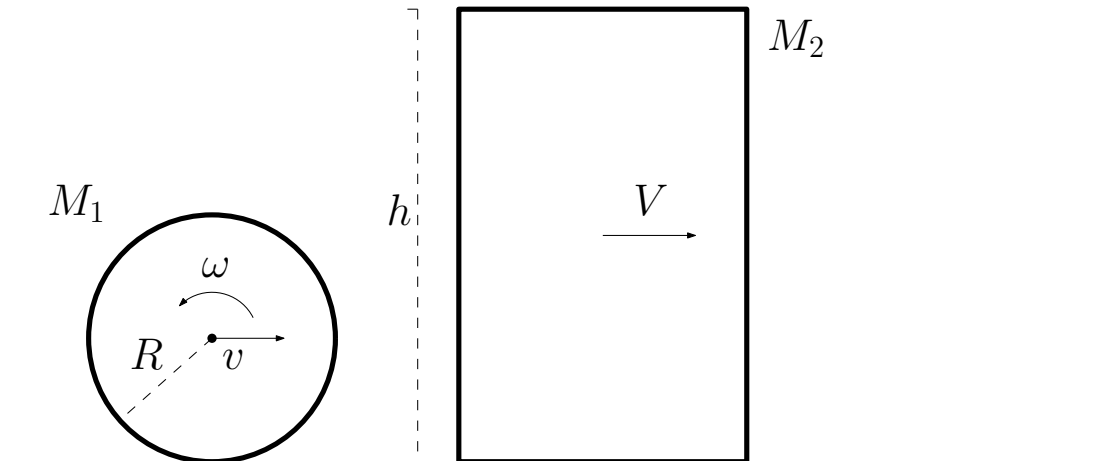
**Urto tra un cilindro e un parallelepipedo \*\***

Figura 6.71.: Il sistema considerato. Inizialmente  $\omega = \omega_0$ ,  $v = -R\omega_0$  (per la condizione di puro rotolamento) e  $V = 0$ .

Un cilindro di massa  $M_1$  e raggio  $R$  ruota senza strisciare su un piano orizzontale. Sullo stesso piano si trova un parallelepipedo di massa  $M_2$  e altezza  $h$ . Il parallelepipedo può scorrere liberamente sul piano orizzontale, ma non può staccarsi da esso, ed inizialmente è fermo. Il cilindro invece ha inizialmente una velocità angolare  $\omega_0 < 0$  e muovendosi urta elasticamente il parallelepipedo. L'urto si può considerare praticamente istantaneo. Calcolare

- le velocità di cilindro e parallelepipedo dopo l'urto;
- l'impulso totale e il momento totale ceduto dal piano orizzontale al parallelepipedo durante l'urto.

**Soluzione**

Dato che l'urto è elastico si conserva l'energia. Di conseguenza possiamo scrivere

$$\frac{1}{2}I_O\omega_0^2 = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

dove abbiamo scritto l'energia cinetica del cilindro come energia di puro rotolamento rispetto al punto di contatto con la superficie orizzontale, istantaneamente ferma. Per questo motivo

$$I_O = \frac{3}{2}M_1R^2$$

Notiamo che nell'urto non si conserva la quantità di moto orizzontale, dato che sul cilindro agisce una forza esterna orizzontale, l'attrito statico necessario a mantenere la condizione di rotolamento puro. Non è nemmeno possibile trovare a priori un polo rispetto al quale il momento delle forze esterne sia nullo. Infatti il piano orizzontale eserciterà durante l'urto sul parallelepipedo un momento di forza impulsivo non noto.

Sappiamo però che il cilindro durante l'urto applica un impulso orizzontale  $J$  al blocco, e quindi possiamo scrivere

$$M_2 \Delta V = J$$

Il blocco applicherà un impulso uguale e contrario al cilindro, e quindi un impulso angolare  $JR$  rispetto ad un polo preso nel punto di contatto col terreno. Allora potremo scrivere la variazione del momento angolare del cilindro nella forma

$$\Delta L_c = JR$$

Combinando le due equazioni precedenti troviamo

$$\Delta (L_c - M_2 RV) = 0$$

quindi la quantità

$$L_c - M_2 RV = I\omega - M_2 RV$$

è conservata. Uguagliando i valori di questa prima e dopo l'urto troviamo

$$I_O \omega_0 = I_O \omega - M_2 RV$$

In conclusione abbiamo le due equazioni

$$\begin{aligned} I_O (\omega_0^2 - \omega^2) &= M_2 V^2 \\ I_O (\omega_0 - \omega) &= -M_2 RV \end{aligned}$$

e risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{aligned} V &= -\frac{2RI_0}{I_0 + M_2 R^2} \omega_0 \\ \omega &= \frac{I_0 - M_2 R^2}{I_0 + M_2 R^2} \omega_0 \\ v &= -\omega R = \frac{I_0 - M_2 R^2}{I_0 + M_2 R^2} v_0 \end{aligned}$$

Notare che questi risultati non dipendono da  $h$ .

Per quanto riguarda l'impulso verticale che il piano esercita sul parallelepipedo, questo deve essere nullo. Se questo non fosse vero dopo l'urto la quantità di moto verticale del parallelepipedo dovrebbe essere diversa da zero, ma questo è impossibile per ipotesi.

L'impulso angolare  $K$  esercitato dal piano sul parallelepipedo in generale non sarà nullo, perché sappiamo che il parallelepipedo non deve ruotare. Prendendo il polo nel centro di massa del parallelepipedo dovrà essere

$$K - J \left( R - \frac{h}{2} \right) = 0$$

e quindi

$$K = J \left( R - \frac{h}{2} \right) = M_2 V \left( R - \frac{h}{2} \right)$$

Se invece prendiamo il polo sul piano orizzontale avremo

$$K - JR = -M_2 V \frac{h}{2}$$

che da (ovviamente?) lo stesso risultato.