PROBLEMA 6.9

## Campo di velocità di un corpo rigido ⋆⋆

Un cilindro di raggio $R$ appoggiato su un piano ruota attorno al suo asse e trasla. Detta $\vec{V} = V\hat{e}_x$ la velocità del centro di massa e $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_z$ la velocità angolare ad un dato istante, determinare il campo di velocità del corpo, ossia la velocità $\vec{v}$ di un punto qualsiasi del cilindro. In quali punti del cilindro la velocità è massima e minima in modulo?

### Soluzione

Possiamo scrivere in forma vettoriale

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge (\vec{r} - \vec{r}_{cm}) + \vec{v}_{cm}$$

L'asse $z$ è lungo l'asse del cilindro e quello $x$ nella direzione del moto del centro di massa. Scriviamo esplicitamente le componenti della velocità ad un dato istante:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ x - x_{cm} & y - y_{cm} & z - z_{cm} \end{vmatrix} + V\hat{e}_x$$

da cui

$$\begin{aligned} v_x &= V - \omega(y - y_{cm}) \\ v_y &= \omega(x - x_{cm}) \\ v_z &= 0 \end{aligned}$$

Calcoliamo il modulo quadro della velocità,

$$v^2 = V^2 + \omega^2(y - y_{cm})^2 + \omega^2(x - x_{cm})^2 - 2\omega V(y - y_{cm})$$

e determiniamone eventuali massimi e minimi rispetto a $x, y$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^2}{\partial x} &= 2\omega^2(x - x_{cm}) = 0 \\ \frac{\partial v^2}{\partial y} &= 2\omega^2(y - y_{cm}) - 2\omega V = 0 \end{aligned}$$

Troviamo una unica soluzione che corrisponde a

$$\begin{aligned} x &= x_{cm} \\ y &= y_{cm} + \frac{V}{\omega} \end{aligned}$$

e quindi a $v^2 = 0$. Se $|V/\omega| \leq R$ il punto precedente è all'interno del cilindro, ed è chiaramente il minimo assoluto del modulo della velocità. Altri eventuali punti stazionari

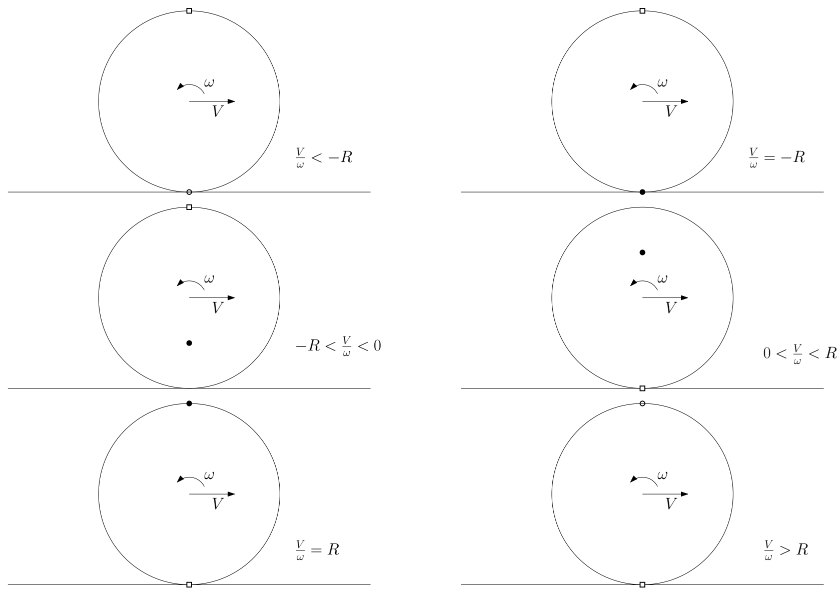


Figura 6.3.: Il cerchietto corrisponde al punto di minima velocità in modulo, il quadrato al punto di massima velocità in modulo. Quando il cerchietto è annerito il punto è istantaneamente in quiete. Il caso $V = -\omega R$ corrisponde a puro rotolamento.

potranno aversi sul bordo. Parametrizzando quest'ultimo:

$$
\begin{aligned}
x - x_{cm} &= R\cos\theta \\
y - y_{cm} &= R\sin\theta
\end{aligned}
$$

abbiamo

$$v^2 = V^2 + \omega^2 R^2 - 2\omega V R \sin\theta$$

e quindi

$$\frac{\partial v^2}{\partial \theta} = -2\omega V R \cos\theta$$

cioè

$$
\begin{aligned}
\theta &= \frac{\pi}{2} \\
v^2 &= (V - \omega R)^2 \\
x - x_{cm} &= 0 \\
y - y_{cm} &= R
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\theta &= \frac{3\pi}{2} \\
v^2 &= (V + \omega R)^2 \\
x - x_{cm} &= 0 \\
y - y_{cm} &= -R
\end{aligned}
$$

Riassumiamo i possibili casi in Figura 6.3.