

PROBLEMA 7.11

Estrazione di una provetta, considerazioni energetiche. **

Vogliamo risolvere il Problema 7.11 basandoci su considerazioni energetiche. Per fare questo scriviamo l'energia potenziale del sistema in funzione della posizione verticale della provetta. Il ragionamento che segue è errato, e conduce a un risultato diverso da quello corretto ottenuto nel problema precedente. Si chiede di scoprire e correggere l'errore.

Sempre facendo riferimento alle quattro fasi rappresentate in Figura 7.10 scriviamo l'energia potenziale del sistema in funzione della posizione verticale della parte più alta della provetta rispetto alla superficie del fluido, indicandola con h .

1. Abbiamo $h < 0$, e l'unica forza esterna che fa lavoro è la forza di gravità applicata alla provetta. Di conseguenza a meno di una costante avremo

$$U = mgh$$

2. Adesso le forze che fanno lavoro sono la forza di gravità applicata alla provetta, la forza di gravità applicata al fluido, la pressione esterna. Dato che la superficie del contenitore è arbitrariamente grande possiamo trascurare la variazione del suo livello e scrivere i tre contributi descritti, nell'ordine, come

$$U = mgh + (\rho Sh) g \left(\frac{1}{2} h \right) + P_A Sh$$

Per scrivere il secondo termine abbiamo moltiplicato la massa totale della colonna di fluido sollevata ρSh per g e per l'altezza a cui è salito il relativo centro di massa $h/2$. L'ultimo termine infine è la pressione esterna per la variazione di volume.

3. Dato che la colonna di fluido smette di salire quando $\rho gh = P_A$, da quel momento la forza di gravità applicata alla colonna di fluido smetterà di fare lavoro, e quindi

$$U = mgh + P_A Sh + \frac{1}{2} \rho S g \left(\frac{P_A}{\rho g} \right)$$

dove l'ultimo termine costante è stato scelto in modo da raccordarsi con continuità con l'espressione valida nella fase precedente.

Appena $h > \ell$ la provetta si svuota e rimane il solo contributo della forza peso, e quindi

$$U = mgh$$

7.11. ESTRAZIONE DI UNA PROVETTA, CONSIDERAZIONI ENERGETICHE. ★★

Se adesso deriviamo le espressioni precedenti rispetto ad h otteniamo la forza necessaria ad equilibrare la provetta, ossia

$$F = \frac{\partial U}{\partial h} = \begin{cases} mg & h < 0 \\ mg + P_A S + \rho g S h & 0 < h < \frac{P_A}{\rho g} \\ mg + P_A S & \frac{P_A}{\rho g} < h < \ell \\ mg & h > \ell \end{cases}$$

Soluzione

L'espressione dell'energia potenziale nella fase 2 è scorretta, come si può notare confrontando l'espressione della forza con quella determinata nel Problema 7.11, perchè il termine legato al lavoro della pressione atmosferica $P_A S h$ deve essere omissso. Questo si può comprendere tenendo conto che l'energia potenziale che vogliamo scrivere è quella del sistema costituito dalla provetta e dal fluido. La pressione atmosferica fa lavoro quindi non solo agendo sulla superficie della provetta, ma anche sulla superficie libera del fluido. Il totale sarà dato quindi da

$$dL = P_A dV$$

dove dV è la variazione *totale* del volume del sistema, che in questa fase coincide con il volume del fluido (la provetta è completamente piena). Ma il fluido è incompressibile, per cui $dV = 0$.

Si può rimanere confusi dal fatto che nel limite di recipiente molto grande la variazione di altezza del livello del fluido tende a zero. Questo è vero, ma non tende invece a zero il prodotto tra la variazione di altezza e la superficie libera.