PROBLEMA 7.12

Tempo di svuotamento di un contenitore ⋆

Un contenitore cilindrico di sezione S è riempito di un liquido di densità ρ. Ad una profondità h viene praticato un foro nella parete laterale di sezione $s \ll S$. Calcolare dopo quanto tempo il livello del liquido scende di tratto $\Delta < h$.

Soluzione

Consideriamo una linea di flusso che collega la superficie del liquido con il foro. Dal teorema di Bernoulli segue che la quantità $H = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + P$ deve avere lo stesso valore sulla superficie, dove abbiamo

$$H = P_0 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \tag{7.12.1}$$

e al foro, dove invece

$$H = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{7.12.2}$$

da cui

$$h = \frac{1}{2g}\left(v_2^2 - v_1^2\right) \tag{7.12.3}$$

Abbiamo indicato con $v_1 = -dh/dt$ la velocità con cui la superficie del liquido si abbassa, e con v_2 la velocità di uscita dal foro. D'altra parte dato che il liquido è incompressibile (la densità ρ è fissata) deve essere

$$S v_1 = s v_2 \tag{7.12.4}$$

e quindi

$$h = \frac{1}{2g}\left(\frac{S^2}{s^2} - 1\right) v_1^2 = \frac{1}{2g}\left(\frac{S^2}{s^2} - 1\right)\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 \tag{7.12.5}$$

Separando le variabili otteniamo

$$\int_{h_0}^{h(t)} \frac{dh}{\sqrt{h}} = \pm \int_0^t \sqrt{\frac{2gs^2}{S^2 - s^2}}dt \tag{7.12.6}$$

da cui, scegliendo il segno opportunamente,

$$\sqrt{h(t)} = \sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{gs^2}{2\left(S^2 - s^2\right)}}t \tag{7.12.7}$$

Il tempo cercato si ottiene ponendo in questa espressione $h(t) = h_0 - \Delta$

$$\begin{aligned} t &= \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_0 - \Delta}\right)\sqrt{\frac{2\left(S^2 - s^2\right)}{gs^2}} \\ &\simeq \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_0 - \Delta}\right) \end{aligned} \tag{7.12.8}$$

Nella soluzione non si è tenuto conto di diverse correzioni possibili, che verranno discusse in altri esercizi. In particolare

1. non si è tenuto conto del fatto che la velocità di uscita del fluido non è perpendicolare alla superficie del foro, quindi non è del tutto corretto stimare il flusso in uscita come sv_2

2. è stato trascurato qualsiasi attrito

3. non si è tenuto conto del fatto che il fluido non è realmente in uno stato stazionario, dato che le velocità in ogni punto cambiano mel tempo. L'approssimazione dovrebbe essere buona per $s \ll S$, almeno lontano dalle fasi finali dello svuotamento.