PROBLEMA 7.2

Secchio rotante ⋆⋆

Un recipiente cilindrico di raggio a ruota attorno al suo asse con velocità angolare ω, e contiene un volume V di un liquido. Il fluido viene trascinato dal recipiente, e in condizioni stazionarie si muove rigidamente e solidalmente con esso. Dire se la quantità

$$H = P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z \tag{7.2.1}$$

assume un valore costante in tutto il liquido e calcolare la forma della superficie libera di esso.

Soluzione

Il teorema di Bernoulli dice che in condizioni stazionarie la quantità H è costante su ogni linea di flusso del fluido. Per concludere che questa costante è la stessa su ogni linea è però necessario che il campo di velocità sia irrotazionale, ipotesi non verificata in questo caso.

Per averne conferma, possiamo cercare di rispondere alla seconda domanda supponendo che H sia veramente costante. Allora sulla superficie libera del fluido deve essere

$$\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + \rho g z = K \tag{7.2.2}$$

cioè

$$z = K' - \frac{\omega^2 r^2}{2g} \tag{7.2.3}$$

Ma questo ci dice che la superficie è un paraboloide di rotazione con concavità rivolta verso il basso, il che è assurdo.

Possiamo invece porci in un sistema che ruota solidale al recipiente. In questo caso il fluido appare in quiete, quindi il suo campo di velocità è ovviamente irrotazionale. Siamo nelle condizioni per poter dedurre dal teorema di Bernoulli che la quantità

$$H = P + \rho\phi \tag{7.2.4}$$

è effettivamente costante in tutto il fluido, indicando con ϕ l'energia potenziale per unità di massa, che tiene conto della forza centrifuga apparente:

$$\phi = gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \tag{7.2.5}$$

Da questo segue immediatamente che

$$z = K + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \tag{7.2.6}$$

cioè un paraboloide di rotazione con concavità rivolta verso l'alto, risultato sensato. Per determinare la costante K calcoliamo il volume del liquido:

$$V = \int_0^a \left(K + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \right) 2\pi r dr = 2\pi \left(K\frac{a^2}{2} + \frac{\omega^2 a^4}{8g} \right) \tag{7.2.7}$$

cioè

$$K = \frac{V}{\pi a^2} - \frac{\omega^2 a^2}{4g} . \tag{7.2.8}$$