PROBLEMA 7.6

Recipiente conico forato ★★

Il recipiente in Figura 7.5 ha la forma di un tronco di cono rovesciato, con un foro circolare sul fondo di sezione S_0. Inizialmente è riempito fino ad una altezza h_0 con un liquido non viscoso. Detto τ il tempo necessario affinchè l'altezza del liquido si riduca a $h_1 < h_0$, scrivere τ come integrale definito e calcolarlo supponendo $h_1 \gg \sqrt{\frac{S_0}{\pi \cot^2\theta}}$.

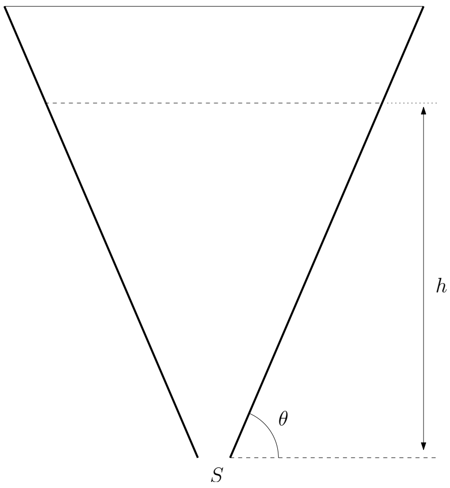

Figura 7.5.: Il recipiente conico considerato nell'esercizio.

Soluzione

Poniamo l'origine di un sistema di coordinate nel vertice del cono. La superficie trasversa dipenderà da z come

$$S(z) = \pi z^2 \cot^2\theta \tag{7.6.1}$$

ed in particolare il foro si troverà a una quota z_0 determinata da

$$S(z_0) = \pi z_0^2 \cot^2\theta = S_0 \tag{7.6.2}$$

mentre la superficie del liquido sarà in

$$z = h + z_0$$

Il volume contenuto nel recipiente sarà quindi

$$V = \frac{1}{3}\left[S(z_0+h)(z_0+h) - S_0 z_0\right] = \frac{\pi}{3}\cot^2\theta\left[(h+z_0)^3 - z_0^3\right] \tag{7.6.3}$$

La variazione del volume V del liquido contenuto nel recipiente è dato da

$$\frac{dV}{dt} = \pi\cot^2\theta\,(h+z_0)^2\frac{dh}{dt} = -S_0 v_- \tag{7.6.4}$$

dove è la velocità di fuoriuscita, da cui

$$v_{-} = -\left(1+\frac{h}{z_0}\right)^2 \frac{dh}{dt} \tag{7.6.5}$$

Se applichiamo il teorema di Bernoulli ad una linea di flusso che collega la superficie al foro di uscita abbiamo

$$\frac{1}{2}\rho\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_{-}^2 \tag{7.6.6}$$

e sostituendo il valore di v_{-} determinato precedentemente troviamo

$$\frac{dh}{dt} = -\sqrt{\frac{2gh}{\left[\left(1+\frac{h}{z_0}\right)^4 - 1\right]}} \tag{7.6.7}$$

L'equazione differenziale è a variabili separabili e il tempo di svuotamento vale

$$t = \int_{h_1}^{h_0} \sqrt{\frac{\left(1+\frac{h}{z_0}\right)^4 - 1}{2gh}}\, dh \tag{7.6.8}$$

Introducendo la variabile $x = h/z_0$ abbiamo infine

$$t = \sqrt{\frac{z_0}{2g}} \int_{h_1/z_0}^{h_0/z_0} \sqrt{\frac{(1+x)^4 - 1}{x}}\, dx \tag{7.6.9}$$

Dobbiamo calcolare questo integrale nel caso $h_1 \gg z_0$. Possiamo supporre allora $x \gg 1$ e approssimare

$$\sqrt{\frac{(1+x)^4 - 1}{x}} \simeq x^{3/2} \tag{7.6.10}$$

Otteniamo quindi

$$t = \sqrt{\frac{z_0}{2g}} \int_{h_1/z_0}^{h_0/z_0} x^{3/2} dx = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{z_0}{2g}} \left[\left(\frac{h_0}{z_0}\right)^{5/2} - \left(\frac{h_1}{z_0}\right)^{5/2}\right] \tag{7.6.11}$$