PROBLEMA 8.1

Sfera radiante ⋆⋆

All'interno di una sfera di raggio R e conducibilità termica η viene prodotto calore in modo omogeneo. Il calore prodotto per unità di volume e unità di tempo vale w.

La sfera è immersa in uno spazio vuoto allo zero assoluto nel quale irraggia come un corpo nero. Calcolare la temperatura all'interno del corpo all'equilibrio.

Soluzione

Per motivi di simmetria il calore si propagherà radialmente, e potremo scrivere la relativa componente della sua densità di corrente come

$$J_q(r) = -\eta \frac{\partial T(r)}{\partial r}$$

dove, per simmetria, anche la temperatura dipenderà solo dal raggio.

Il calore che attraversa una superficie sferica di raggio r sarà dato da

$$\frac{dQ}{dt}(r) = 4\pi r^2 J_q(r) = -4\pi\eta r^2 \frac{\partial T(r)}{\partial r} \tag{8.1.1}$$

e dovrà essere uguale al calore prodotto per unità di tempo in tutto il volume in esso contenuto:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 w = -4\pi\eta r^2 \frac{\partial T(r)}{\partial r}$$

Otteniamo un'equazione differenziale per la temperatura della forma

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{rw}{3\eta}$$

che possiamo integrare direttamente:

$$T(r) = T(0) - \frac{w}{6\eta} r^2$$

Per determinare la costante di integrazione imponiamo che il flusso di calore irradiato sia uguale a quello determinato dalla (8.1.1)

$$4\pi R^2 J_q(R) = 4\pi R^2 \sigma T(R)^4$$

cioè

$$4\pi\eta \frac{w}{3\eta} R^3 = 4\pi R^2 \sigma \left(T(0) - \frac{w}{6\eta} R^2 \right)^4$$

da cui

$$T(0) = \left(\frac{wR}{3\sigma} \right)^{1/4} + \frac{w}{6\eta} R^2$$

Da tutto ciò segue

$$T(r) = \left(\frac{wR}{3\sigma}\right)^{1/4} + \frac{w}{6\eta}\left(R^2 - r^2\right)$$