PROBLEMA 8.3

Tre corpi in contatto termico ⋆⋆

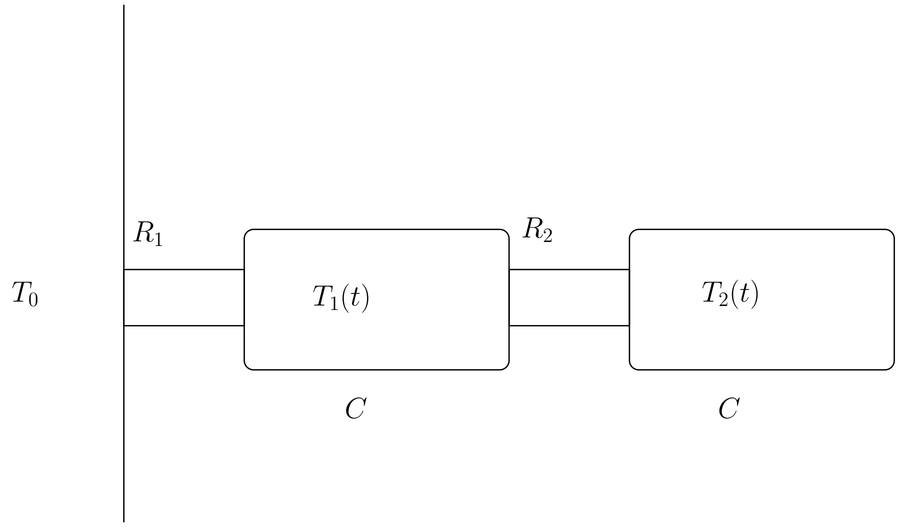

Figura 8.1.: I tre corpi (quello più a sinistra è un bagno termico) in contatto tra loro.

Due corpi di uguale capacità termica sono collegati tra di loro e ad un bagno termico di temperatura T_0 tramite delle resistenze termiche R_1 e R_2 come in Figura 8.1. Calcolare la temperatura all'equilibrio e l'evoluzione delle temperature $T_1(t)$ e $T_2(t)$ a partire da una data condizione iniziale. Trascurare la capacità termica delle resistenze.

Soluzione

La temperatura di equilibrio è ovviamente quella del bagno termico. Per verificarlo possiamo immaginare che il bagno termico abbia in realtà una capacità termica C_0 molto grande. In accordo con la formula generale all'equilibrio termico avremo

$$T_f = \frac{C_0 T_0 + C T_1 + C T_2}{C_0 + 2C} \tag{8.3.1}$$

e passando al limite $C_0 \to \infty$ otteniamo $T_f = T_0$.

Scriviamo adesso le equazioni che determinano la evoluzione delle temperature. Per le correnti di calore abbiamo

$$R_1 I_1(t) = T_0 - T_1(t) \tag{8.3.2}$$
$$R_2 I_2(t) = T_1(t) - T_2(t) \tag{8.3.3}$$

e d'altra parte

$$C\frac{dT_1(t)}{dt} = I_1(t) - I_2(t) \tag{8.3.4}$$

$$C\frac{dT_2(t)}{dt} = I_2(t) \tag{8.3.5}$$

cioè

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1+\gamma_2 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 T_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.3.6}$$

dove abbiamo posto $\gamma_1^{-1} = R_1 C$ e $\gamma_2^{-1} = R_2 C$. Questo è un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, non omogeneo. Cercheremo prima una soluzione particolare, quindi la soluzione generale del sistema omogeneo associato.

Se all'istante iniziale le temperature dei due corpi sono uguali a quelle di equilibrio, ci aspettiamo che rimangano tali anche successivamente. In altre parole $T_1(t) = T_2(t) = T_0$ è una soluzione particolare, come si verifica facilmente per sostituzione.

Veniamo alla soluzione generale dell'omogenea, che cercheremo nella forma

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{\beta t}. \tag{8.3.7}$$

Sostituendo troviamo

$$\beta\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{\beta t} + \begin{pmatrix} \gamma_1+\gamma_2 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{\beta t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.3.8}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} \gamma_1+\gamma_2+\beta & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & \gamma_2+\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8.3.9}$$

Questo sistema lineare omogeneo avrà soluzioni non banali solo quando il determinante della matrice sarà nullo. Da

$$\begin{vmatrix} \gamma_1+\gamma_2+\beta & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & \gamma_2+\beta \end{vmatrix} = \beta^2 + (\gamma_1 + 2\gamma_2)\,\beta + \gamma_1\gamma_2 = 0\,. \tag{8.3.10}$$

troviamo che questo accade per due valori (entrambi reali e negativi) di β:

$$\beta_\pm = \frac{-(\gamma_1+2\gamma_2) \pm \sqrt{\gamma_1^2+4\gamma_2^2}}{2}. \tag{8.3.11}$$

Le corrispondenti soluzioni per A_1 e A_2 saranno

$$\beta = \beta_+ : \qquad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} \gamma_2+\beta_+ \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \tag{8.3.12}$$

$$\beta = \beta_- : \qquad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = c_2\begin{pmatrix} \gamma_2+\beta_- \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \tag{8.3.13}$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie. Otteniamo quindi la soluzione generale sommando la soluzione generale dell'omogenea alla soluzione particolare.

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \gamma_2 + \beta_+ \\ \gamma_2 \end{pmatrix} e^{\beta_+ t} + c_2 \begin{pmatrix} \gamma_2 + \beta_- \\ \gamma_2 \end{pmatrix} e^{\beta_- t} + \begin{pmatrix} T_0 \\ T_0 \end{pmatrix} . \tag{8.3.14}$$

Imponiamo le condizioni iniziali a $t = 0$:

$$\begin{pmatrix} T_1^0 - T_0 \\ T_2^0 - T_0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \gamma_2 + \beta_+ \\ \gamma_2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \gamma_2 + \beta_- \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 + \beta_+ & \gamma_2 + \beta_- \\ \gamma_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{8.3.15}$$

che ci permettono di calcolare c_1 e c_2:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} T_1^0 - T_0 & \gamma_2 + \beta_- \\ T_2^0 - T_0 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma_2 + \beta_+ & \gamma_2 + \beta_- \\ \gamma_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}} = \frac{\gamma_2 \left(T_1^0 - T_0\right) - \left(T_2^0 - T_0\right) \left(\gamma_2 + \beta_-\right)}{\gamma_2 \left(\beta_+ - \beta_-\right)} \tag{8.3.16}$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_2 + \beta_+ & T_1^0 - T_0 \\ \gamma_2 & T_2^0 - T_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma_2 + \beta_+ & \gamma_2 + \beta_- \\ \gamma_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}} = \frac{-\gamma_2 \left(T_1^0 - T_0\right) + \left(T_2^0 - T_0\right) \left(\gamma_2 + \beta_+\right)}{\gamma_2 \left(\beta_+ - \beta_-\right)} . \tag{8.3.17}$$

Consideriamo adesso due casi particolari, cominciando da $\gamma_2 \gg \gamma_1$. In questo caso $R_2 \ll R_1$. Abbiamo

$$\beta_+ = -2\gamma_2 \left[\left(1 + \frac{\gamma_1}{2\gamma_2}\right) - \sqrt{1 + \frac{\gamma_1^2}{4\gamma_2^2}} \right] = -2\gamma_2 \left[\frac{\gamma_1}{2\gamma_2} + O\left(\frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2}\right) \right] \simeq -\frac{1}{2}\gamma_1 \tag{8.3.18}$$

$$\beta_- = -2\gamma_2 \left[\left(1 + \frac{\gamma_1}{2\gamma_2}\right) + \sqrt{1 + \frac{\gamma_1^2}{4\gamma_2^2}} \right] = -2\gamma_2 \left[2 + O\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) \right] \simeq -2\gamma_2 \tag{8.3.19}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_2 + \beta_+ \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \tag{8.3.20}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_2 + \beta_- \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -\gamma_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \tag{8.3.21}$$

$$c_1 \simeq \frac{T_1^0 + T_2^0 - 2T_0}{2\gamma_2} \tag{8.3.22}$$

$$c_2 \simeq \frac{T_2^0 - T_1^0}{2\gamma_2} . \tag{8.3.23}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \simeq \frac{T_1^0 + T_2^0 - 2T_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\gamma_1 t} + \frac{T_2^0 - T_1^0}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2\gamma_2 t} + \begin{pmatrix} T_0 \\ T_0 \end{pmatrix} . \tag{8.3.24}$$

possiamo interpretare la soluzione nel seguente modo: la differenza di temperatura tra i due corpi tende a zero molto velocemente, con un tempo caratteristico dato da $\frac{1}{2}\gamma_2^{-1}$. Invece la temperatura media dei due corpi tende alla temperature di equilibrio, ma con un tempo caratteristico molto più grande γ_1^{-1}. Questo è facilmente comprensibile, dato che a causa della bassa resistenza termica tra i due corpi questi tenderanno a stabilire un equilibrio locale tra di loro molto velocemente. Un esempio è riportato in Figura 8.2

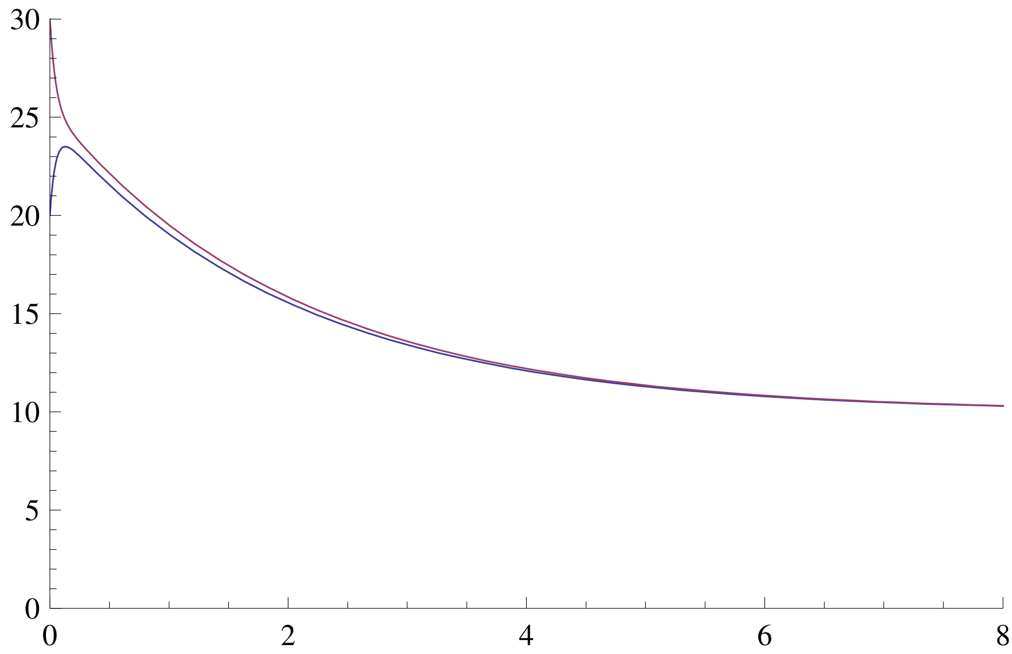

Figura 8.2.: Evoluzione delle temperature per $\gamma_1 = 1\,s^{-1}$, $\gamma_2 = 10\,s^{-1}$, $T_0 = 10\,K$, $T_1^0 = 20\,K$, $T_2^0 = 30\,K$.

Vediamo invece cosa accade se $\gamma_1 \gg \gamma_2$. In questo caso

$$\beta_+ = \frac{1}{2}\gamma_1 \left[-\left(1 + 2\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) + \sqrt{1 + 4\frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2}} \right] \simeq -\gamma_2 \tag{8.3.25}$$

$$\beta_- = \frac{1}{2}\gamma_1 \left[-\left(1 + 2\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) - \sqrt{1 + 4\frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2}} \right] \simeq -\gamma_1 \tag{8.3.26}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_2 + \beta_+ \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \tag{8.3.27}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_2 + \beta_- \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -\gamma_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.3.28}$$

$$c_1 = \frac{(T_2^0 - T_0)}{\gamma_2} \tag{8.3.29}$$

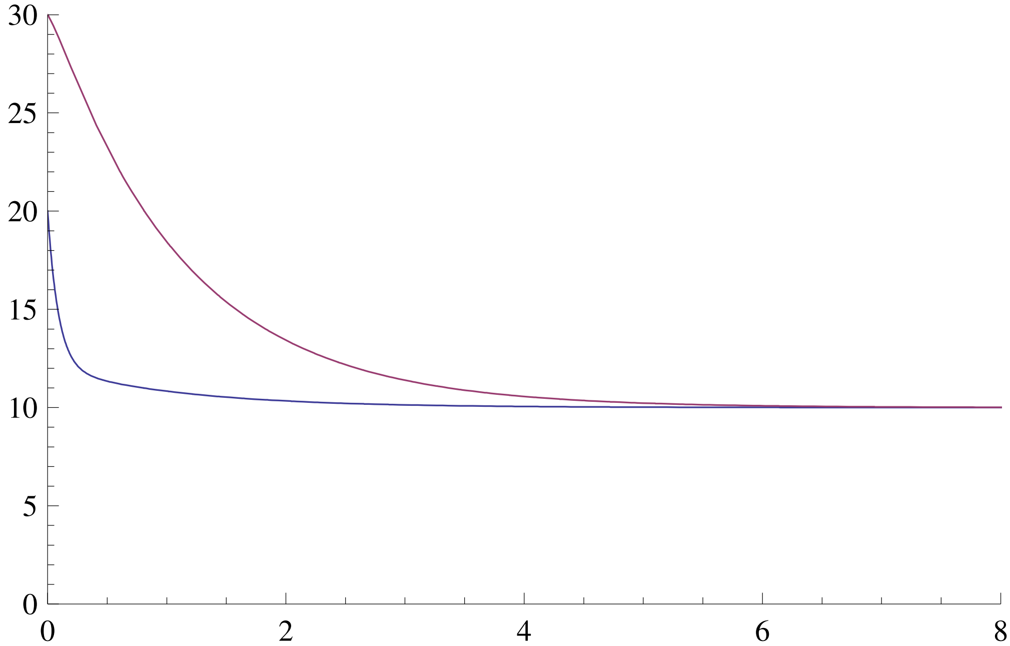

Figura 8.3.: Evoluzione delle temperature per $\gamma_1 = 10\,s^{-1}$, $\gamma_2 = 1\,s^{-1}$, $T_0 = 10\,K$, $T_1^0 = 20\,K$, $T_2^0 = 30\,K$.

$$c_2 = \frac{-\left(T_1^0 - T_0\right)}{\gamma_1}\,. \tag{8.3.30}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \simeq \left(T_2^0 - T_0\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\gamma_2 t} - \left(T_1^0 - T_0\right)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\gamma_1 t} + \begin{pmatrix} T_0 \\ T_0 \end{pmatrix}\,. \tag{8.3.31}$$

Anche in questo caso l'interpretazione è chiara: il primo corpo tende molto rapidamente alla temperatura del bagno termico, con un tempo caratterstico dato da γ_1^{-1}. Il secondo termalizza più lentamente, con un tempo caretteristico dato da $\gamma_2^{-1} \gg \gamma_1^{-1}$. Un esempio è in Figura 8.3.