PROBLEMA 8.4

Sbarra conduttrice ⋆⋆

La temperatura di una sbarra di lunghezza ℓ e sezione S è inizialmente

$$T(x,0) = T_1 \left(1 - \beta \cos \frac{\pi}{\ell} x\right) \tag{8.4.1}$$

con $\beta < 1$. La sbarra è isolata termicamente, ed è costituita di un materiale di conducibilità termica κ, calore specifico c e densità ρ. Calcolare la temperatura finale,

$$T_f = \lim_{t\to\infty} T(x,t) \tag{8.4.2}$$

e l'evoluzione temporale $T(x,t)$.

Soluzione

La temperatura finale si può calcolare immediatamente come media delle temperature iniziali dei diversi elementi della sbarra, pesati con le capacità termiche. Dato che la capacità termica di un tratto infinitesimo della sbarra è $\rho S c dx$ abbiamo

$$T_f = \frac{\int T(x,0)\,\rho S c\,dx}{\int \rho S c dx} = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell T_1 \left(1 - \beta \cos \frac{\pi}{\ell} x\right) dx = T_1\,. \tag{8.4.3}$$

Per calcolare l'evoluzione temporale ricordiamo che la densità di corrente di calore è proporzionale al gradiente di temperatura:

$$J_q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \tag{8.4.4}$$

e che la variazione temporale della temperatura è data da

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial J_q}{\partial x} \tag{8.4.5}$$

da cui

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,. \tag{8.4.6}$$

Se calcoliamo la derivata seconda della temperatura iniziale rispetto ad x otteniamo

$$\frac{\partial^2 T(x,0)}{\partial x^2} = \beta T_1 \frac{\pi^2}{\ell^2} \cos \frac{\pi}{\ell} x\,. \tag{8.4.7}$$

Questo suggerisce di cercare una soluzione della forma

$$T(x,t) = T_1 + \Delta(t) \cos \frac{\pi}{\ell} x\,. \tag{8.4.8}$$

CC BY NC SA

Sostituendo nell'equazione troviamo

$$\dot{\Delta}(t)\cos\frac{\pi}{\ell}x = -\frac{\kappa}{c\rho}\frac{\pi^2}{\ell^2}\Delta\cos\frac{\pi}{\ell}x \tag{8.4.9}$$

e quindi

$$\Delta(t) = C_1 e^{-\gamma t} \tag{8.4.10}$$

con $\gamma = \frac{\kappa\pi^2}{c\rho\ell^2}$. Imponendo la condizione iniziale troviamo $C_1 = -\beta T_1$ e quindi

$$T(x,t) = T_1\left(1 - \beta e^{-\gamma t}\cos\frac{\pi}{\ell}x\right) . \tag{8.4.11}$$

CC BY NC SA