PROBLEMA 8.5

Equazione del calore unidimensionale ⋆⋆

Ricavare l'equazione del calore in una dimensione, nel caso generale in cui densità, calore specifico e conducibilità termica sono funzione della posizione.

Soluzione

La prima equazione da cui partire è quella che da la densità di corrente di calore,

$$J_q(x,t) = -\kappa(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \tag{8.5.1}$$

la seconda quella che lega l'aumento della temperatura in un tratto della sbarra al calore entrante:

$$\rho(x)c(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial J_q(x,t)}{\partial x}\,. \tag{8.5.2}$$

Questa si ottiene applicando $cm\Delta T = \Delta Q$ a un tratto della sbarra compresa tra $x - dx/2$ e $x + dx/2$.

$$c(x)\rho(x)Sdx\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = J_q(x - dx/2, t)S - J_q(x + dx/2, t)S = -\frac{\partial J_q(x,t)}{\partial x}Sdx + O(dx^2)\,. \tag{8.5.3}$$

Derivando la prima equazione rispetto a x e eliminando la corrente di calore usando la seconda otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \rho c\frac{\partial T}{\partial t}\,. \tag{8.5.4}$$