PROBLEMA 8.6

Fluttuazione di temperatura su una sbarra ⋆⋆

Determinate se possibile $\Delta(t)$ e $\sigma(t)$ in modo che la funzione

$$T(x,t) = T_0 + \Delta(t) \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{A(t)}\right) \tag{8.6.1}$$

sia soluzione dell'equazione del calore

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{8.6.2}$$

con (vedere l'Esercizio 8.5) e date una interpretazione del risultato.

Soluzione

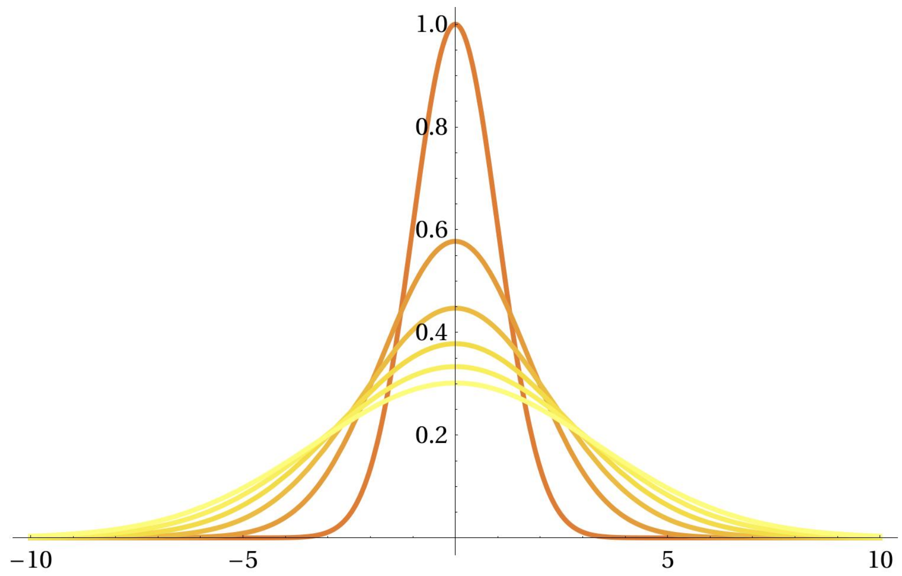

Figura 8.4.: L'evoluzione temporale della fluttuazione di temperatura considerata nel problema. La curva più alta corrisponde alla fluttuazione iniziale, le successive via via più basse a $\mu t = 1, 2, 3, 4, 5$. Sulle ascisse la posizione in unità σ_0, sulle ordinate la fluttuazione in unità Δ_0.

Calcoliamo le derivate della (8.6.1). Abbiamo

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\dot{\Delta} + \frac{1}{2}\Delta\frac{\dot{A}}{A^2}x^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{A}\right)$$
$$\mu\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \mu\Delta\left[\left(\frac{x}{A}\right)^2 - \frac{1}{A}\right] \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{A}\right)$$

ed uguagliando queste due espressioni vediamo che devono valere le due condizioni

$$\begin{aligned}\dot{\Delta} &= -\frac{\mu\Delta}{A} \\ \frac{1}{2}\Delta\frac{\dot{A}}{A^2} &= \frac{\mu\Delta}{A^2}\end{aligned}$$

La seconda equazione si integra immediatamente dopo una semplice semplificazione ottenendo

$$A(t) = \sigma_0^2 + 2\mu t$$

e sostituendo nella prima abbiamo

$$\frac{\dot{\Delta}}{\Delta} = \frac{d}{dt}\log\Delta = -\frac{\mu}{\sigma_0^2 + 2\mu t}$$

da cui

$$\Delta(t) = \Delta_0\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + 2\mu t}}$$

Sostituendo otteniamo

$$T(x,t) = T_0 + \Delta_0\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + 2\mu t}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma_0^2 + 2\mu t}\right) \tag{8.6.3}$$

Possiamo interpretare il risultato come l'evoluzione temporale di una fluttuazione di temperatura Gaussiana su un sistema unidimensionale omogeneo (per esempio una sbarra). La larghezza della fluttuazione cresce con legge $\sigma(t) \equiv \sqrt{\sigma_0^2 + 2\mu t}$. La sua ampiezza al tempo stesso si riduce: questo è una conseguenza della conservazione dell'energia: infatti l'energia totale della fluttuazione è data dall'integrale

$$E_f = \rho c \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_0\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + 2\mu t}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma_0^2 + 2\mu t}\right) dx \tag{8.6.4}$$

Introducendo la nuova variabile $y = x/\sigma(t)$ vediamo che l'integrale si scrive nella forma

$$E_f = \rho c \Delta_0 \sigma_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy \tag{8.6.5}$$

che è evidentemente indipendente dal tempo.