PROBLEMA 8.7

Una soluzione particolare dell'equazione del calore unidimensionale ⋆⋆⋆

Data l'equazione del calore unidimensionale

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

studiare, se esistono, soluzioni particolari del tipo

$$T(x,t) = N(t)\Phi\left(\frac{x}{f(t)}\right)$$

dove $N(t)$ e $f(t)$ sono funzioni incognite da determinare. Assumere che l'energia della sbarra si finita e si conservi.

Soluzione

L'energia totale della sbarra si può scrivere nella forma

$$U(t) = \rho c \int_{-\infty}^{\infty} T(x,t) dx$$

cioè, per la soluzione proposta,

$$\begin{aligned} U(t) &= \rho c \int_{-\infty}^{\infty} N(t)\Phi\left(\frac{x}{f(t)}\right) dx \\ &= \rho c N(t) f(t) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u)\, du \end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto la variabile $u = x/\sigma$. Dato che l'integrale è ovviamente indipendente dal tempo, dovrà essere

$$N = \frac{1}{f}$$

Calcolando le derivate abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{\dot{f}}{f^2}\Phi - \frac{x}{f^3}\dot{f}\Phi' \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{1}{f^3}\Phi'' \end{aligned}$$

e sostituendo otteniamo

$$\frac{\mu}{f^2}\Phi''(u) + \frac{\dot{f}}{f}u\Phi'(u)\frac{\dot{f}}{f}\Phi(u) = 0$$

Ma questo si può anche scrivere nella forma

$$\Phi'' + \frac{f\dot{f}}{\mu}\frac{d}{du}(u\Phi) = 0$$

Integrando rispetto ad u otteniamo

$$\Phi'(u) + \frac{f\dot{f}}{\mu}u\Phi(u) = C_1$$

otteniamomembro a membro rispetto al tempo vediamo che deve essere

$$\frac{d}{dt}f\dot{f} = 0$$

cioè

$$\frac{d^2}{dt^2}f^2 = 0$$

e integrando otteniamo

$$f^2 = f_0^2 + \alpha t$$

dove α e f_0 sono costanti arbitrarie. L'equazione differenziale per Φ si può riscrivere allora nella forma

$$\Phi'(u) + \frac{\alpha}{2\mu}u\Phi(u) = C_1$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Il metodo standard per la risoluzione consiste nel moltiplicare membro a membro per un opportuno fattore integrante. In questo caso ad esempio otteniamo

$$\left[\Phi'(u) + \frac{\alpha}{2\mu}u\Phi(u)\right]e^{\frac{\alpha}{4\mu}u^2} = C_1 e^{\frac{\alpha}{4\mu}u^2}$$

che si può riscrivere come

$$\frac{d}{du}\left[\Phi e^{\frac{\alpha}{4\mu}u^2}\right] = C_1 e^{\frac{\alpha}{4\mu}u^2}$$

Integrando abbiamo

$$\Phi = C_1 e^{-\frac{\alpha}{4\mu}u^2}\int_0^u e^{\frac{\alpha}{4\mu}w^2}dw + C_2 e^{-\frac{\alpha}{4\mu}u^2}$$

Infine

$$T(x,t) = \frac{1}{\sigma(t)}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}\right)\left[C_1'\int_0^{\frac{x}{\sigma}} e^{\frac{w^2}{2}}dw + C_2'\right]$$

dove abbiamo definito

$$\sigma(t) \equiv \sqrt{\frac{2\mu f_0^2}{\alpha} + 2\mu t} = \sqrt{\frac{2\mu}{\alpha}}f(t)$$

Notiamo adesso che termine proporzionale a C_1' non è accettabile fisicamente. Infatti essendo una funzione dispari di x, assume valori negativi (temperature negative non sono accettabili) o per x positivi o per x negativi, e domina per $|x|$ sufficientemente grandi su quello proporzionale a C_2'. Di conseguenza le uniche soluzioni accettabili sono

$$\begin{aligned} T(x,t) &= \frac{A}{\sigma(t)} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}\right) \\ \sigma(t) &= \sqrt{\sigma_0^2 + 2\mu t} \end{aligned}$$

cioè quelle studiate nell'Esercizio 8.6.