PROBLEMA 8.8

Temperatura a regime di una sbarra radioattiva ★★

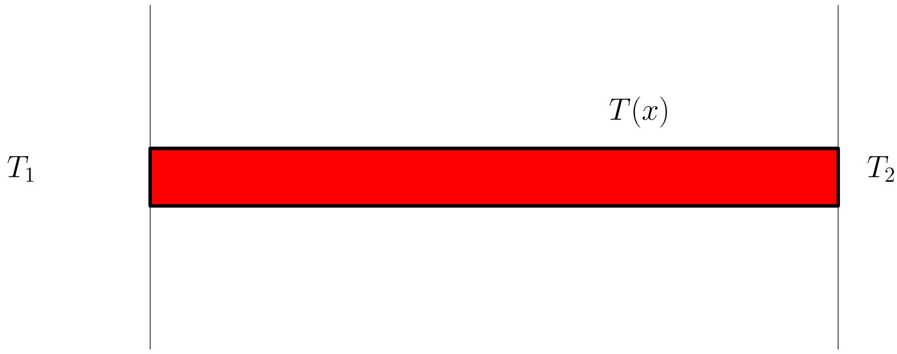

Figura 8.5.: La sbarra radioattiva considerata nel problema

Una sbarra di lunghezza ℓ, sezione S e conducibilità termica σ, sezione a tra due corpi molto grandi mantenuti a temperatura costante T_1 e $T_2 > T_1$ (Figura 8.5). La sbarra è radioattiva, e al suo interno viene continuamente prodotta energia: il calore generato per unità di volume e di tempo è η.

- Determinare la temperatura della sbarra a regime.
- Per quali valori di η il punto più caldo della sbarra non si trova ad un estremo?
- In quali condizioni non si ha trasmissione di calore tra la sbarra e il corpo a temperatura T_2?

Soluzione

A regime il calore uscente da un tratto di sbarra compreso tra e $x = x_2$ deve essere uguale a quello prodotto all'interno. Detta $J(x)$ la densità di corrente di calore abbiamo dunque

$$SJ(x_2) - SJ(x_1) = (x_2 - x_1)\, S\eta$$

ed in particolare prendendo $x_1 = 0$ e $x_2 = x$

$$J(x) = J(0) + x\eta$$

Dato che il calore viene trasmesso per conduzione abbiamo dalla legge di Fourier

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{\sigma}J(x) = -\frac{1}{\sigma}J(0) - \frac{\eta}{\sigma}x$$

ed integrando troviamo

$$T(x) = T_1 - \frac{x}{\sigma}J(0) - \frac{\eta}{2\sigma}x^2$$

Imponendo le condizioni al contorno $T(\ell) = T_2$

$$T_1 - \frac{\ell}{\sigma} J(0) - \frac{\eta \ell^2}{2\sigma} = T_2$$

troviamo la corrente all'estremo sinistro della sbarra,

$$J(0) = \frac{\sigma}{\ell} (T_1 - T_2) - \frac{\eta \ell}{2}$$

e quindi

$$T(x) = T_1 + \frac{x}{\ell} (T_2 - T_1) + \frac{\eta}{2\sigma} x (\ell - x)$$

l punto più caldo non si trova ad un estremo se il massimo della funzione $T(x)$ è all'interno dell'intervallo $0 < x < \ell$. Dato che

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\ell} (T_2 - T_1) + \frac{\eta}{2\sigma} (\ell - 2x)$$

deve essere

$$-\frac{\ell}{2} < \frac{\sigma}{\eta \ell} (T_2 - T_1) < \frac{\ell}{2}$$

dato che

$$x_{max} = \frac{\sigma}{\eta \ell} (T_2 - T_1) + \frac{\ell}{2}$$

cioè per

$$\eta > \frac{2\sigma}{\ell^2} (T_2 - T_1)$$

Infine, dalla legge di Fourier troviamo che J si annulla nel massimo di $T(x)$. Questo si troverà in $x = \ell$ quando

$$\eta = \frac{2\sigma}{\ell^2} (T_2 - T_1)$$

e in tali condizioni $J(\ell) = 0$. Notare che non è mai possibile ottenere $J(0) = 0$, in altre parole del calore viene sempre scambiato con il corpo più freddo.