PROBLEMA 9.14

Sistema termodinamico a tre corpi ⋆⋆⋆

Si considerino tre corpi di capacità termica C indipendente dalla temperatura, che si trovano all'inizio alle temperature T_{1i}, T_{2i} e T_{3i}. Calcolare la massima temperatura a cui è possibile portare uno dei tre corpi senza fare lavoro sul sistema dall'esterno.

Soluzione

Se consideriamo una generica trasformazione termodinamica agente sul sistema, in essa verranno cedute delle quantità di calore Q_1, Q_2 e Q_3 a ciascuno dei tre corpi.

Per la conservazione dell'energia dovrà essere

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \tag{9.14.1}$$

da cui, dette T_{1f}, T_{2f} e T_{3f} le temperature finali avremo

$$T_{1f} + T_{2f} + T_{3f} = T_{1i} + T_{2i} + T_{3i} \tag{9.14.2}$$

Se nel corso della trasformazione si ha una variazione di entropia totale ΔS avremo inoltre

$$\Delta S = C \log \frac{T_{1f}}{T_{1i}} + C \log \frac{T_{2f}}{T_{2i}} + C \log \frac{T_{3f}}{T_{3i}} \tag{9.14.3}$$

ossia

$$T_{1f} T_{2f} T_{3f} = T_{1i} T_{2i} T_{3i} e^{\frac{\Delta S}{C}} \tag{9.14.4}$$

Osserviamo adesso che nella configurazione finale i due corpi più freddi dovranno avere la stessa temperatura T_-. Se così non fosse sarebbe possibile ottenere lavoro da essi, e usarlo per innalzare ulteriormente la temperatura del corpo più caldo. Porremo quindi

$$T_+ = T_{1f} \tag{9.14.5}$$

$$T_- = T_{2f} = T_{3f} \tag{9.14.6}$$

Notare che abbiamo stabilito che alla fine il corpo più caldo sarà il primo. Siamo liberi di farlo, perchè le Equazioni (9.14.2) e (9.14.4) sono simmetriche rispetto ai tre corpi. Questo dipende dal fatto che le tre capacità termiche sono uguali. Riscriviamo quindi le Equazioni (9.14.2) e (9.14.4) nella forma

$$T_+ + 2T_- = T_{1i} + T_{2i} + T_{3i} \tag{9.14.7}$$

$$T_+ T_-^2 = T_{1i} T_{2i} T_{3i} e^{\frac{\Delta S}{C}} \tag{9.14.8}$$

Studiamo graficamente le soluzioni di questo sistema nel piano $T_+ - T_-$.

I grafici delle due relazioni sono rappresentate in Figura 9.10. All'aumentare dell'entropia ΔS prodotta la retta rimane fissa, mentre il secondo grafico (del tipo $y = k/x^2$) si sposta verso l'alto.

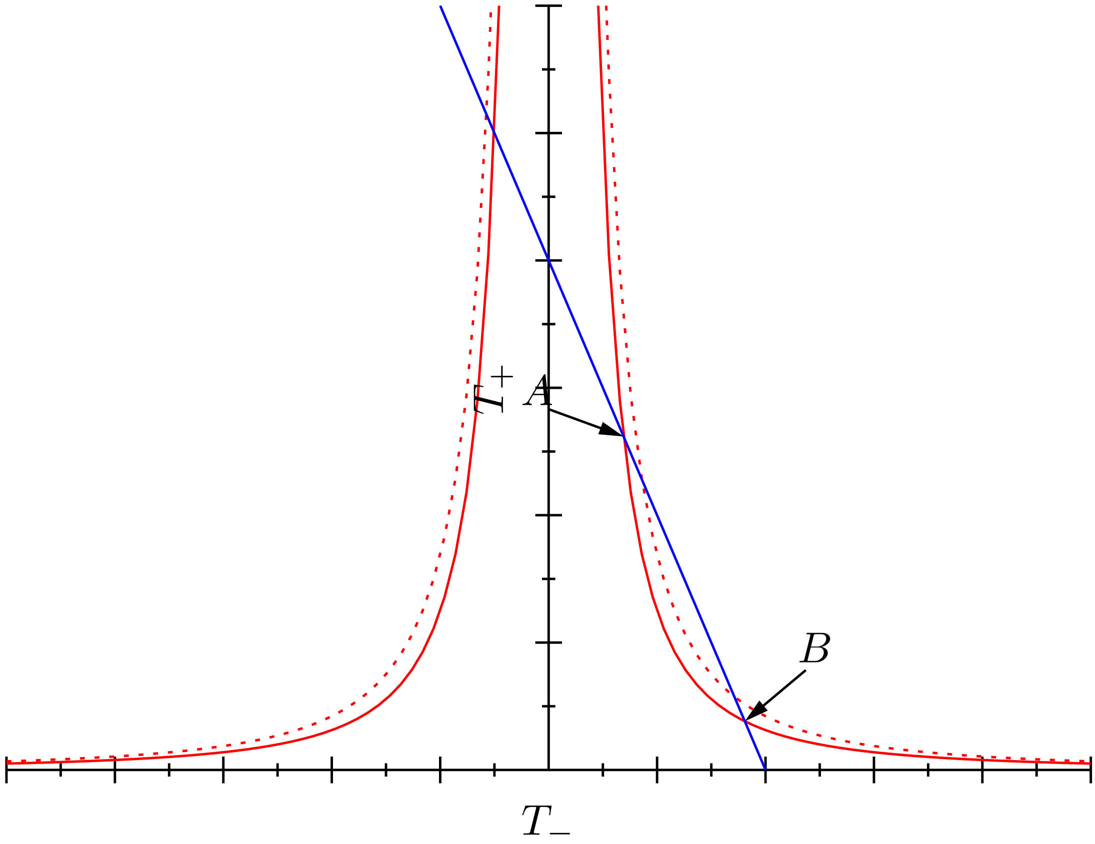

Figura 9.10.: Soluzione grafica del sistema (9.14.7)-(9.14.8). La retta corrisponde alla (9.14.7), la curva continua alla (9.14.8) per $\Delta S = 0$. Infine la curva tratteggiata corrisponde alla (9.14.8) per un valore $\Delta S > 0$.

Le uniche intersezioni fisicamente accettabili sono nel primo quadrante, perchè $T_- > 0$. Delle due, quella indicata con A nel grafico corrisponde alla massima temperatura raggiungibileT_+^{MAX}. Vediamo che T_+^{MAX} diminuisce all'aumentare di ΔS. Il caso migliore corrisponde quindi a $\Delta S = 0$.

Il calcolo esplicito di T_+^{MAX} si può ottenere ricavando T_- dalla (9.14.7) e sostituendo nella (9.14.8). Si ottiene un'equazione di terzo grado

$$T_+ \left(T_+ - T_{1i} + T_{2i} + T_{3i}\right)^2 = 4T_{1i}T_{2i}T_{3i}e^{\frac{\Delta S}{C}} \tag{9.14.9}$$

Concludiamo con alcune osservazioni:

- Una procedura possibile per portare il sistema nello stato A è la seguente:
  1. supponiamo che il corpo 2 e il corpo 3 siano inizialmente i più freddi. Utilizzando una macchina termica reversibile si ricava lavoro L dalla loro differenza di temperatura.

2. adesso il corpo 2 e il corpo 3 hanno la stessa temperatura. Possiamo quindi metterli in contatto in modo reversibile e considerarli da quel momento come un corpo unico di capacità termica $2C$
3. utilizzando nuovamente una macchina termica reversibile si sfrutta tutto il lavoro L ottenuto in precedenza per pompare calore dal corpo 2+3 al corpo 1

- Per ΔS abbastanza grande non si hanno più intersezioni. Questo corrisponde a produzioni di entropia non realizzabili.
- L'intersezione B corrisponde alla situazione in cui la temperatura T_- comune a due corpi raggiunge il massimo valore possibile.
- La massima produzione di entropia corrisponde al caso in cui le intersezioni A e coincidono.