PROBLEMA 9.16

Lavoro da un termos di caffè II ⋆⋆

Calcolare nuovamente il lavoro massimo estraibile dal sistema descritto nel problema precedente, questa volta però utilizzando una trasformazione concreta del sistema. Le operazioni possibili sono due: muovere il pistone che chiude il termos in maniera controllata e mettere il contenuto in contatto termico con l'ambiente.

Soluzione

Dato che sappiamo di dover operare in modo reversibile per massimizzare il lavoro utile estratto, non possiamo porre immediatamente in contatto il contenuto del termos con l'ambiente: si avrebbe un passaggio spontaneo di calore e quindi un aumento di entropia del sistema.

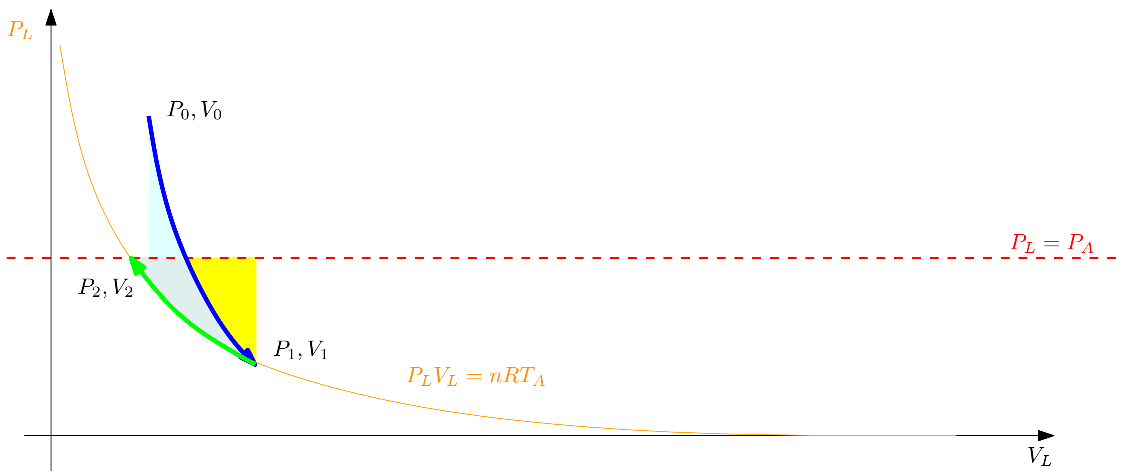

Figura 9.12.: La trasformazione utilizzata nel piano P_L, V_L. L'espansione adiabatica iniziale è rappresentata dalla curva blu, l'isoterma in verde.

Per prima cosa quindi eseguiamo un'espansione adiabatica reversibile, durante la quale il gas all'interno del termos compie un lavoro positivo e l'ambiente negativo. Il lavoro utile estratto sarà

$$dW = (P_L - P_A)\, dV_L = -dU_L - P_A dV_L$$

dove si è approfittato del fatto che l'espansione è adiabatica per esprimere il risultato nella seconda forma. Notare che fino a quando $P_L > P_A$ (cioè fino a quando la pressione all'interno del termos è maggiore di quella dell'ambiente) il bilancio totale è positivo. Noi procederemo però fino a quando $T_L = T_A$. Dato che l'espansione è adiabatica avremo

$$dU_L + P_L dV_L = 0$$

cioè

$$C dT_L + \frac{nRT_L}{V_L} dV_L = 0$$

da cui, integrando,

$$C \log T_L + nR \log V_L = \text{costante}$$

oppure

$$V_L T_L^{\frac{C}{nR}} = \text{costante}$$

e quindi il volume finale dell'espansione sarà dato da

$$V_1 = V_0 \left(\frac{T_0}{T_A}\right)^{\frac{C}{nR}}$$

Il lavoro utile estratto durante questa fase di espansione sarà quindi

$$W_1 = C\left(T_0 - T_A\right) - P_A\left(V_1 - V_0\right)$$

Adesso che la temperatura del contenuto del termos è identica a quella esterna possiamo mettere in contatto termico i due sottosistemi, e ricavare ulteriore lavoro con una trasformazione isoterma. Ancora una volta otteremo lavoro utile fino a quando la pressione del gas all'interno del termos diverrà uguale a quella dell'ambiente, quindi

$$W_2 = \int_{V_1}^{V_2} \left(P_L - P_A\right) dV_L$$

Calcoliamo il volume corrispondente alla pressione interna P_A. Dato che abbiamo a che fare con una trasformazione isoterma sarà

$$P_A V_2 = P_1 V_1 = nRT_A$$

e quindi

$$\begin{aligned}
W_2 &= \int_{V_1}^{\frac{nRT_A}{P_A}} \left(P_L - P_A\right) dV_L \\
&= \int_{V_1}^{\frac{nRT_A}{P_A}} \frac{nRT_A}{V_L} dV_L - P_A\left(\frac{nRT_A}{P_A} - V_1\right) \\
&= nRT_A \log\frac{nRT_A}{P_A V_1} - P_A\left(\frac{nRT_A}{P_A} - V_1\right)
\end{aligned}$$

Sommando otteniamo

$$\begin{aligned}
W = W_1 + W_2 &= C\left(T_0 - T_A\right) - P_A\left(V_1 - V_0\right) + nRT_A \log\frac{nRT_A}{P_A V_1} - P_A\left(\frac{nRT_A}{P_A} - V_1\right) \\
&= C\left(T_0 - T_A\right) + P_A\left(V_0 - V_2\right) + \left(C + nR\right) T_A \log\frac{T_A}{T_0} + nRT_A \log\frac{P_0}{P_A}
\end{aligned}$$

che è lo stesso risultato ottenuto nell'esercizio precedente.

La trasformazione seguita rappresentata in Figura 9.12. Notare che il lavoro utile è l'area compresa tra la curva e la retta $P_L = P_A$, dato che è necessario sottrarre il lavoro negativo dell'ambiente. In particolare nell'espansione adiabatica iniziale si ottiene lavoro utile fino a quando $P_L > P_A$ (area azzurra) e si perde successivamente (area gialla). L'espansione adiabatica termina quanto $T_L = T_A$. A questo punto si procede su un'isoterma fino a raggiungere la pressione ambientale. Nel caso in figura in cui $P_1 < P_A$ si tratta di una compressione (un esercizio consigliato è disegnare il grafico nel caso $P_1 > P_A$). Si guadagna lavoro utile, più di quello che serve a compensare quello giallo perso precedentemente. Il lavoro utile totale è la somma dell'area azzurra e di quella grigia.