PROBLEMA 9.18

Lavoro estraibile da un sistema chiuso ★★

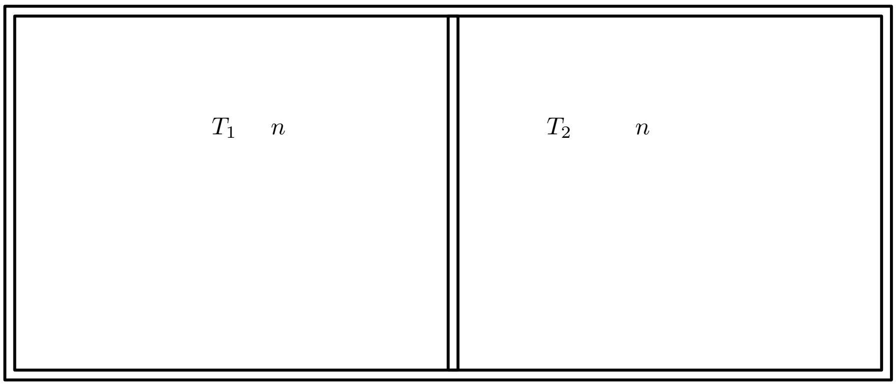

Figura 9.14.: Il sistema descritto nel testo. Il setto intermedio è scorrevole, le pareti impermeabili al calore.

Il recipiente in Figura 9.14, impermeabile al calore, è diviso in due scomparti da un setto scorrevole. Anche il setto è impermeabile al calore. Inizialmente nei due scomparti si trovano n moli di un gas perfetto monoatomico alle temperature e $T_2 > T_1$. Si conosce il volume totale del recipiente V.

1. Determinare i volumi iniziali occupati dai due gas.
2. Se si permette al calore di passare spontaneamente attraverso il setto, quanto vale la temperatura finale di equilibrio del sistema? Di quanto è cambiata l'entropia?
3. Considerando nuovamente la situazione iniziale, e un setto impermeabile, determinare il massimo lavoro che è possibile estrarre dal sistema.

Soluzione

Domanda 1 Dato che il pistone è scorrevole, i due setti sono in equilibrio meccanico e quindi alla stessa pressione. Abbiamo quindi le tre equazioni

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &= V \\ PV_1 &= nRT_1 \\ PV_2 &= nRT_2 \end{aligned}$$

che permettodo di determinare P, V_1 e V_2. Sostituendo i volumi nella prima otteniamo la pressione

$$P = nR\frac{T_1 + T_2}{V}$$

e quindi

$$\begin{aligned}V_1 &= \frac{T_1}{T_1+T_2}V\\ V_2 &= \frac{T_2}{T_1+T_2}V\end{aligned}$$

Domanda 2 Dato che il contenitore è isolato l'energia interna non cambia. Di conseguenza, detta T_f la temperatura finale dovrà essere

$$nc_V T_1 + nc_V T_2 = 2nc_V T_f$$

da cui

$$T_f = \frac{T_1+T_2}{2}$$

In questo stato il volume di ciascun setto è la metà del totale, come segue dalle espressioni ottenute alla domanda precedente. Quindi la variazione di entropia sarà

$$\begin{aligned}\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 &= nc_V \log\frac{T_f}{T_1} + nR\log\frac{\frac{1}{2}V}{V_1} + nc_V\log\frac{T_f}{T_2} + nR\log\frac{\frac{1}{2}V}{V_2}\\ &= nc_V\log\frac{T_f^2}{T_1T_2} + nR\log\frac{V^2}{4V_1V_2}\\ &= nc_V\log\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2} + nR\log\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2}\\ &= 2nc_P\log\frac{T_1+T_2}{2\sqrt{T_1T_2}}\end{aligned}$$

Questo risultato si poteva derivare più rapidamente osservando che se il calore viene scambiato molto lentamente possiamo considerare i gas nei due scomparti istante per istante all'equilibrio, ad una pressione costante. Quindi possiano utilizzare per ciascuno di essi

$$dS = \frac{dQ}{T} = nc_P\frac{dT}{T}$$

cioè

$$\Delta S = nc_P\int_{T_1}^{T_f}\frac{dT}{T} + nc_P\int_{T_2}^{T_f}\frac{dT}{T}$$

Domanda 3 Il massimo lavoro estraibile si ottiene operando in modo reversibile sul sistema. Supponendo di estrarre una quantità di calore Q_2 dal setto più caldo e di fornirne Q_1 a quello freddo avremo infine ottenuto un lavoro utile

$$W = Q_2 - Q_1$$

D'altra parte dal primo principio abbiamo

$$\begin{aligned}Q_2 &= -nc_V\left(T_f - T_2\right) - PdV_2\\ Q_1 &= nc_V\left(T_f - T_1\right) + PdV_1\end{aligned}$$

e quindi sottraendo membro a membro

$$Q_2 - Q_1 = W = nc_V\left(T_1 + T_2 - 2T_f\right) - P\left(dV_1 + dV_2\right)$$

Dato che il volume totale non cambia $dV_1 + dV_2 = dV = 0$, e quindi

$$W = nc_V\left(T_1 + T_2 - 2T_f\right)$$

Resta da determinare la temperatura finale. Dato che lavoriamo in modo reversibile la variazione di entropia è nulla. Quindi

$$\begin{aligned}
\Delta S &= nc_V \log\frac{T_f}{T_1} + nR\log\frac{V}{2V_1} + nc_V\log\frac{T_f}{T_2} + nR\log\frac{V}{2V_2} \\
&= nc_V \log\frac{T_f^2}{T_1 T_2} + nR\log\frac{V^2}{4V_1V_1} \\
&= nc_V \log\frac{T_f^2}{T_1 T_2} + nR\log\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2} = 0
\end{aligned}$$

da cui

$$T_f = \left[\frac{2\sqrt{T_1T_2}}{T_1+T_2}\right]^{R/c_V}\sqrt{T_1T_2}$$

Sostituendo otteniamo il risultato finale che possiamo scrivere nella forma

$$W = nc_V\left(T_1+T_2\right)\left[1 - \left(\frac{2\sqrt{T_1T_2}}{T_1+T_2}\right)^{\gamma}\right]$$

dalla quale si vede immediatamente che , dato che è sempre

$$\frac{T_1+T_2}{2} \geq \sqrt{T_1T_2}$$