PROBLEMA 9.19

Massima potenza di un ciclo di Carnot ⋆⋆⋆

Si vuole ricavare lavoro da una trasformazione ciclica che usa come sorgenti due bagni termici di temperatura T_L e $T_H > T_L$. La trasformazione consiste in un ciclo di Carnot in cui le temperature T_1 e T_2 delle isoterme sono intermedie a quelle delle sorgenti:

$$T_L < T_1 < T_2 < T_H \tag{9.19.1}$$

Quando il sistema è alla temperatura T_1 è in contatto con la sorgente alla temperatura T_L mediante una resistenza termica R_T. Analogamente quando è alla temperatura T_2 è in contatto con la sorgente alla temperatura T_H, sempre tramite la stessa resistenza termica.

Si vogliono determinare le temperature di lavoro T_1 e T_2 in modo da massimizzare la potenza utile, considerando trascurabile il tempo necessario ad eseguire le trasformazioni adiabatiche. Calcolare per le temperature T_1 e T_2 ottimali l'efficienza del ciclo.

Soluzione

Consideriamo le varie fasi del ciclo di Carnot:

1. Compressione isoterma alla temperatura T_1, a contatto con la sorgente a temperatura T_L. Il sistema riceve un calore $Q_1 = T_1\Delta S_1$ (negativo) dalla sorgente a temperatura T_L. Affinchè questo avvenga è necessario un tempo τ_1 determinato dalla
$$Q_1 = -\frac{1}{R_T}(T_1 - T_L)\,\tau_1 \tag{9.19.2}$$

2. Compressione adiabatica dalla temperatura T_1 alla temperatura T_2. Non si hanno scambi di calore e, come detto in precedenza, il tempo necessario è trascurabile.

3. Espansione isoterma alla temperatura T_2, a contatto con la sorgente a temperatura T_H. Il sistema riceve un calore $Q_2 = T_2\Delta S_2$ dalla sorgente a temperatura T_H. Il tempo τ_2 necessario alla trasformazione sarà determinato da
$$Q_2 = \frac{1}{R_T}(T_H - T_2)\,\tau_2$$

4. Espansione adiabatica dalla temperatura T_2 alla temperatura T_1. Non si hanno scambi di calore ed anche questa volta il tempo necessario è trascurabile.

Il lavoro complessivo fatto dal sistema vale per il primo principio

$$L = Q_1 + Q_2 = T_1\Delta S_1 + T_2\Delta S_2 \tag{9.19.3}$$

e quindi la potenza sarà

$$P_W = \frac{L}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{\frac{R_T Q_1}{T_L - T_1} + \frac{R_T Q_2}{T_H - T_2}} \tag{9.19.4}$$

Dato che dopo un ciclo il sistema torna nello stato iniziale, e che durante le adiabatiche non varia la propria entropia, dovrà essere $\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0$. Di conseguenza

$$P_W = \frac{1}{R_T} \frac{T_2 - T_1}{\frac{T_1}{T_1 - T_L} + \frac{T_2}{T_H - T_2}} = \frac{1}{R_T} \frac{(T_1 - T_2)(T_2 - T_H)(T_1 - T_L)}{T_1 T_H - T_2 T_L} \tag{9.19.5}$$

che si può riscrivere nella forma

$$P_W = \frac{1}{R_T} \frac{(1 - x)(1 - y)(T_L x - T_H y)}{x - y} \tag{9.19.6}$$

introducendo le variabili $x = T_1/T_L$ e $y = T_2/T_H$. Derivando abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_W}{\partial x} &= \frac{(1 - y)\left[T_H (1 - y) + T_L \left(2xy - y - x^2\right)\right]}{(x - y)^2} \\
\frac{\partial P_W}{\partial y} &= \frac{(1 - x)\left[T_L (1 - x) + T_H \left(2xy - x - y^2\right)\right]}{(x - y)^2}
\end{aligned}$$

I valori $x = 1$ e $y = 1$ che annullano le espressioni precedenti non sono accettabili, perchè corrispondono a $P_W = 0$ (minimi). Il massimo sarà quindi determinato dalle soluzioni contemporanee di

$$\begin{aligned}
\frac{T_H}{T_L} y (1 - y) + \left(2xy - y - x^2\right) &= 0 \\
\frac{T_L}{T_H} x (1 - x) + \left(2xy - x - y^2\right) &= 0
\end{aligned}$$

Le soluzioni chiaramente dipendono solo dal rapporto T_L/T_H. Risolvendo il sistema si trovano le soluzioni

$$\begin{aligned}
(x, y) &= (0, 0) \\
(x, y) &= (1, 1) \\
(x, y) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_H}{T_L}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_L}{T_H}}\right) \\
(x, y) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_H}{T_L}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_L}{T_H}}\right)
\end{aligned}$$

Solo l'ultima soddisfa le condizioni $T_L < T_1 < T_2 < T_H$. Abbiamo quindi

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(T_L + \sqrt{T_L T_H}\right)$$
$$T_2 = \frac{1}{2}\left(T_H + \sqrt{T_L T_H}\right)$$

che corrispondono ad una potenza

$$P_W = \left(\frac{T_H + T_L - 2\sqrt{T_H T_L}}{4R_T}\right) \tag{9.19.7}$$

e ad una efficienza

$$\eta = 1 - \sqrt{\frac{T_L}{T_H}} = \frac{1 - \frac{T_L}{T_H}}{1 + \sqrt{\frac{T_L}{T_H}}} \tag{9.19.8}$$

Notare che l'efficienza non dipende da R_T.