PROBLEMA 9.20

Trasferimento di calore tra un corpo e un bagno termico ⋆⋆ $\mathcal{S}$

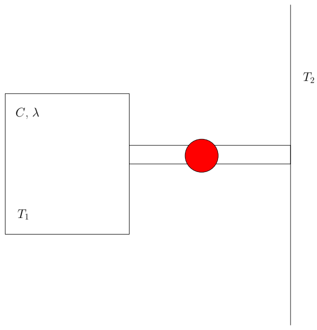

Figura 9.15.: Il corpo (a sinistra) e il bagno termico (a destra) considerati nell'esercizio.

Un contenitore riempito con una miscela al 50% in massa di ghiaccio ed acqua viene posto in contatto con un bagno termico di temperatura $T_2 = 300\,K$ mediante una barra di rame (conducibilità termica $\sigma = 391\,W/(m\,K)$), lunghezza $\ell = 10^{-1}\,m$ e sezione $S = 10^{-4}\,m^2$. Il calore latente di fusione del ghiaccio è $\lambda = 335 \times 10^3\,J/kg$, il calore specifico dell'acqua $c = 4.18 \times 10^3\,J/(kg\,K)$ e la massa totale della miscela $M = 1\,kg$. Si trascuri la capacità termica della barra e si considerino isolanti le pareti del contenitore e della barra.

1. Calcolare la temperatura e la variazione di entropia del contenitore in funzione del tempo.

2. Calcolare la variazione finale di entropia dell'universo.

3. Se al posto del contatto termico si utilizza una macchina termica reversibile quale è il massimo lavoro utile estraibile dal sistema?

Soluzione[1]

Domanda 1

Il passaggio di calore avviene per conduzione, e possiamo scrivere per il calore ceduto alla miscela per unità di tempo

$$\dot{Q} = \frac{\sigma S}{\ell}\left(T_2 - T\right)$$

In una prima fase questo calore serve a sciogliere il ghiaccio, la temperatura della miscela rimane quindi quella di fusione del ghiaccio T_0 e possiamo scrivere per la massa di

[1] Secondo esercizio scritto 31 gennaio 2007

ghiaccio sciolto $m(t)$

$$\lambda\dot{m} = \dot{Q} = \frac{\sigma S}{\ell}\left(T_2 - T_0\right)$$

da cui

$$\lambda m(t) = Q(t) = \frac{\sigma S}{\ell}\left(T_2 - T_0\right)t$$

La temperatura resta quindi costante e l'entropia aumenta linearmente

$$\Delta S_R(t) = \frac{Q(t)}{T_0} = \frac{\sigma S}{\ell}\left(\frac{T_2}{T_0} - 1\right)t$$

Quando $m(t) = M/2$ tutto il ghiaccio si è sciolto. Questo avviene per

$$t = t_1 = \frac{\lambda \ell M}{2\sigma S\left(T_2 - T_0\right)}$$

Da questo momento vale

$$cM\dot{T} = \dot{Q} = \frac{\sigma S}{\ell}\left(T_2 - T\right)$$

L'equazione

$$\dot{T} = \frac{\sigma S}{c\ell M}\left(T_2 - T\right)$$

si integra immediatamente:

$$\int_{T_0}^{T(t)} \frac{dT'}{\left(T_2 - T'\right)} = \int_{t_1}^{t} \frac{\sigma S}{c\ell M}dt$$

da cui

$$\log\frac{T(t) - T_2}{T_0 - T_2} = -\frac{\sigma S}{c\ell M}\left(t - t_1\right)$$

e quindi

$$T(t) = T_2 + \left(T_0 - T_2\right)\exp\left[-\frac{\sigma S}{c\ell M}\left(t - t_1\right)\right]$$

Per l'entropia avremo

$$\dot{S}_R = \frac{1}{T}\dot{Q} = cM\frac{\dot{T}}{T} = cM\frac{d}{dt}\log T$$

da cui

$$\Delta S_R(t) = \Delta S_R(t_1) + cM\log\frac{T(t)}{T_0}$$

Domanda 2

La variazione di entropia finale del contenitore vale

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\Delta S_R(t) &= \frac{\sigma S}{\ell}\left(\frac{T_2}{T_0}-1\right)t_1 + cM\log\frac{T_2}{T_0}\\ &= \frac{\lambda M}{2T_0} + cM\log\frac{T_2}{T_0}\end{aligned}$$

Invece l'entropia del bagno termico è variata di

$$\Delta S_B = -\frac{Q}{T_2}$$

dove Q è il calore totale ceduto al recipiente (e estratto dal bagno). Abbiamo quindi

$$\Delta S_B = -\frac{1}{T_2}\left[\frac{\lambda M}{2} + cM\left(T_2 - T_0\right)\right]$$

In conclusione

$$\Delta S = \Delta S_R + \Delta S_B = \frac{\lambda M}{2}\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T_2}\right) + cM\left[\log\frac{T_2}{T_0} - \left(1-\frac{T_0}{T_2}\right)\right]$$

Domanda 3

Detto Q_1 il calore ceduto al recipiente e Q_2 quello estratto dal bagno termico abbiamo dal primo principio che il lavoro estratto W vale

$$W = Q_2 - Q_1$$

Dato che la temperatura finale del recipiente deve essere T_2 avremo

$$Q_1 = \frac{M\lambda}{2} + cM\left(T_2 - T_0\right)$$

Per estrarre la massima quantità di lavoro possibile si deve operare in modo reversibile, quindi

$$\Delta S = \Delta S_R + \Delta S_B = 0$$

ma

$$\Delta S = \frac{\lambda M}{2T_0} + cM\log\frac{T_2}{T_0} - \frac{Q_2}{T_2}$$

da cui

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_0}\frac{\lambda M}{2} + cMT_2\log\frac{T_2}{T_0}$$

Otteniamo infine

$$W = \left(\frac{T_2}{T_0}-1\right)\frac{\lambda M}{2} + cM\left[T_2\log\frac{T_2}{T_0} - \left(T_2 - T_0\right)\right]$$