PROBLEMA 9.23

Effetto della capacità termica di un recipiente ⋆ $\mathcal{S}$

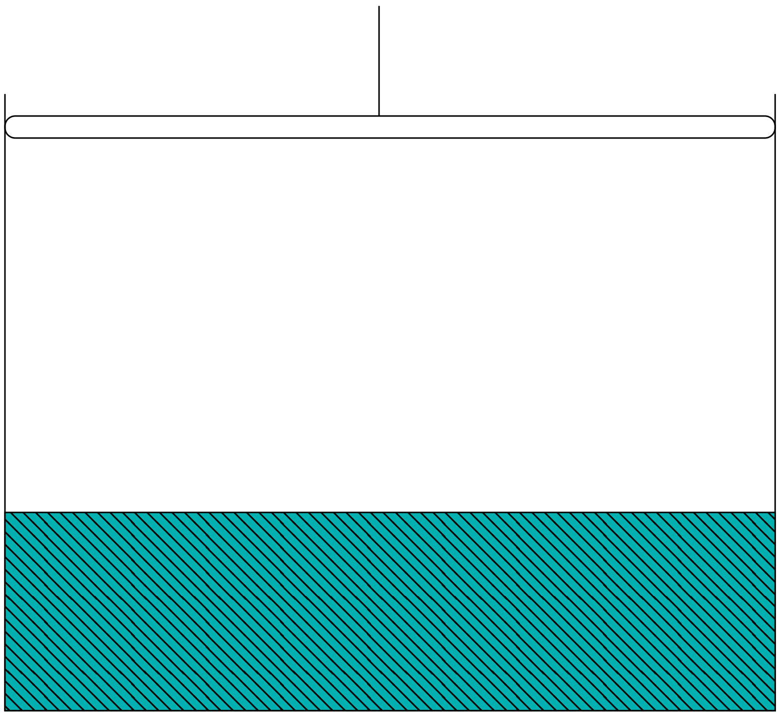

Figura 9.17.: Il cilindro contente del materiale di capacità termica non nulla.

Sul fondo di un cilindro di sezione S munito di un pistone mobile e impermeabile al calore si trova uno strato di materiale di capacità termica C_1. Nella parte superiore si trovano n moli di un gas perfetto monoatomico. Inizialmente il sistema è all'equilibrio termodinamico, con pressione e temperatura P_0 e T_0 note.

1. Si raddoppia molto lentamente la pressione. Calcolare la nuova temperatura.

2. Partendo dalla stessa condizione iniziale si raddoppia istantaneamente la forza applicata al pistone. Calcolare anche in questo caso la temperatura nello stato finale di equilibrio.

3. Calcolare la variazione di entropia del sistema e dell'universo nei due casi precedenti.

Soluzione[4]

Problema 1

Dal primo principio abbiamo, considerando che non si hanno scambi di calore con l'esterno,

$$0 = dU + pdV \tag{9.23.1}$$

ma l'energia interna del sistema si può scrivere come la somma di quella del gas e del materiale, quindi

$$dU = \frac{3}{2}nRdT + C_1 dT \tag{9.23.2}$$

e quindi

$$\left(\frac{3}{2}nR + C_1\right) dT + \frac{nRT}{V} dV = 0 \tag{9.23.3}$$

che può essere integrata direttamente:

$$\left(\frac{3}{2}nR + C_1\right) \log T + nR \log V = K \tag{9.23.4}$$

ossia

$$T^{\left(\frac{3}{2}nR + C_1\right)} V^{nR} = \text{costante} \tag{9.23.5}$$

oppure, usando la legge dei gas perfetti,

$$TP^{-\eta} = \text{costante} \tag{9.23.6}$$

con

$$\eta = \frac{nR}{\frac{5}{2}nR + C_1} \tag{9.23.7}$$

Da questo segue subito che

$$T_f = T_0 \left(\frac{P_f}{P_0}\right)^{\eta} = T_0 2^{\eta} \tag{9.23.8}$$

Problema 2

In questo caso non abbiamo a che fare con una trasformazione reversibile, quello che possiamo dire è che l'aumento dell'energia interna sarà dato dal lavoro fatto sul sistema:

$$-2P_0 \left(V_f - V_0\right) = \Delta U = \left(\frac{3}{2}nR + C_1\right) \left(T_f - T_0\right) \tag{9.23.9}$$

ma d'altra parte negli stati iniziale e finale di equilibrio

$$P_0 V_0 = nRT_0 \tag{9.23.10}$$

[4]Secondo problema scritto 21 gennaio 2009

$$2P_0V_f = nRT_f \tag{9.23.11}$$

e sostituendo

$$-nR\left(T_f - 2T_0\right) = \left(\frac{3}{2}nR + C_1\right)\left(T_f - T_0\right) \tag{9.23.12}$$

ossia

$$T_f = \frac{\frac{7}{2}nR + C_1}{\frac{5}{2}nR + C_1}T_0\,. \tag{9.23.13}$$

Problema 3

Nel primo caso la trasformazione è reversibile, quindi l'entropia dell'universo non cambia. Ma neppure si hanno scambi di calore con il sistema, quindi anche l'entropia di quest'ultimo non varia.

Nel secondo caso la trasformazione è irreversibile. La variazione di entropia del sistema si trova calcolando la differenza tra l'entropia dello stato di equilibrio finale e quella dello stato di equilibrio iniziale. Dato che

$$dS = \frac{dQ}{T} = \left(\frac{3}{2}nR + C_1\right)\frac{dT}{T} + \frac{nR}{V}dV \tag{9.23.14}$$

possiamo scrivere

$$\Delta S = \left(\frac{3}{2}nR + C_1\right)\log\frac{T_f}{T_0} + nR\log\frac{V_f}{V_0} = \left(\frac{5}{2}nR + C_1\right)\log\frac{T_f}{T_0} + nR\log\frac{P_0}{P_f} \tag{9.23.15}$$

e quindi

$$\Delta S = \left(\frac{5}{2}nR + C_1\right)\log\frac{\frac{7}{2}nR + C_1}{\frac{5}{2}nR + C_1} - nR\log 2\,. \tag{9.23.16}$$

Questa sarà anche la variazione di entropia dell'universo.