PROBLEMA 9.24

Acqua e ghiaccio a pressione costante ⋆⋆ $\mathcal{S}$

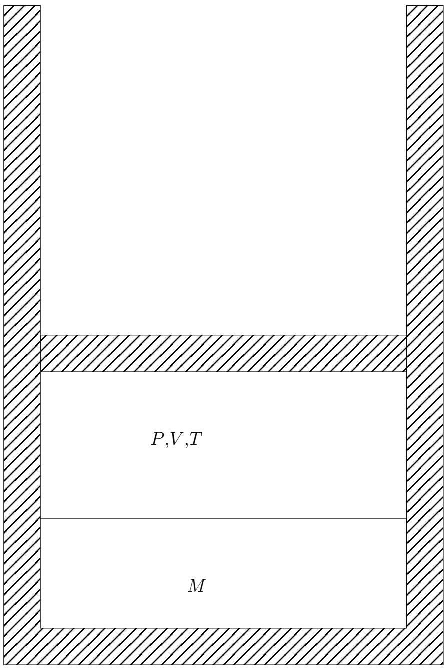

Figura 9.18.: Il recipiente impermeabile al calore considerato nell'esercizio.

Il recipiente in Figura 9.18 è chiuso da un setto scorrevole $\mathcal{S}$. Recipiente e setto sono impermeabili al calore, ed il setto ha massa trascurabile. Il volume interno è ulteriormente diviso in due parti da una parete rigida, che permette invece il contatto termico tra le due parti. Nella parte inferiore si trova una massa M di ghiaccio a $0\,^{\circ}C$, in quella superiore n moli di un gas perfetto. L'esterno del recipiente si trova a pressione atmosferica.

1. Determinare il volume V del gas nella condizione iniziale.

2. Si comprime adesso il setto superiore fino a portare la temperatura del gas a $20\,^{\circ}C$ in modo reversibile. Determinare la dipendenza della pressione del gas dal suo volume per questa trasformazione, e rappresentarla su un grafico. Di quanto è variata l'entropia del sistema?

3. Supponendo di utilizzare il sistema come sorgente fredda, e che l'ambiente esterno possa essere considerato un bagno termico a temperatura $T = 20\,^{\circ}C$, trasferendo calore mediante una macchina termica, determinare il massimo lavoro estraibile.

Soluzione[5]

Domanda 1

Dato che il gas è in equilibrio termico con il ghiaccio deve essere

$$P_{atm} V_0 = nRT_0 \tag{9.24.1}$$

dove $T_0 = 0\,°C$, da cui

$$V = V_0 = \frac{nRT_0}{P_{atm}} \tag{9.24.2}$$

Domanda 2

Finchè del ghiaccio è presente, la temperatura del sistema è fissata a T_0. Quindi

$$P = \frac{nRT_0}{V} \tag{9.24.3}$$

Dal primo principio segue che

$$\delta Q = 0 = \lambda dm + PdV \tag{9.24.4}$$

dove dm è la massa di ghiaccio che si scioglie e λ il calore latente di fusione. Segue che

$$nRT_0 \frac{dV}{V} + \lambda dm \tag{9.24.5}$$

e quindi quando tutto il ghiaccio si è sciolto il volume è diventato

$$V_1 = V_0 \exp\left(-\frac{\lambda M}{nRT_0}\right) \tag{9.24.6}$$

Da questo momento in poi vale

$$\delta Q = 0 = (C + nc_V)\, dT + PdV \tag{9.24.7}$$

dove C è la capacità termica dell'acqua. Abbiamo quindi

$$(C + nc_V) \int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V} nR \frac{dV}{V} = 0 \tag{9.24.8}$$

ossia

$$(C + nc_V) \log \frac{T}{T_0} + nR \log \frac{V}{V_1} = 0 \tag{9.24.9}$$

che si può esprimere nella forma

$$V^{nR} T^{C + nc_V} = \text{cost} \tag{9.24.10}$$

[5]Secondo problema scritto 11 novembre 2008

oppure

$$PV^{\beta} = \text{cost} \tag{9.24.11}$$

dove

$$\beta = \frac{c_P + C/n}{c_V + C/n} \tag{9.24.12}$$

Quindi la trasformazione si rappresenta come una isoterma per $V_1 < V < V_0$, e come una adiabatica con un esponente modificato per $V_f < V < V_1$. Il volume finale si ottiene dalla (9.24.10):

$$V_f = V_1 \left(\frac{T_0}{T_f}\right)^{\frac{C+nc_V}{nR}} \tag{9.24.13}$$

con $T_f = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Dato che il sistema non scambia calore con l'esterno la sua variazione di entropia è nulla.

Domanda 3

Sia δQ_1 il calore assorbito dall'ambiente e δQ_2 quello ceduto al sistema. Chiaramente $W = Q_1 - Q_2$. Fino a quando è presente del ghiaccio le temperature sono fissate, e dato che l'entropia totale non varia deve essere

$$\frac{Q_2}{T_0} = \frac{Q_1}{T_f} \tag{9.24.14}$$

e d'altra parte $Q_2 = \lambda M$, quindi

$$W = \left(\frac{T_f}{T_0} - 1\right) \lambda M \tag{9.24.15}$$

sarà il lavoro prodotto in questa prima fase.

Appena tutto il ghiaccio si è sciolto deve essere

$$\delta Q_2 = (C + nc_V)\, dT + PdV \tag{9.24.16}$$

$$dS = (C + nc_V)\frac{dT}{T} + \frac{P}{T}dV - \frac{\delta Q_1}{T_f} = 0 \tag{9.24.17}$$

Integrando la seconda relazione otteniamo, tenendo conto che la pressione è costante

$$Q_1 = T_f\,(C + nc_V + nR) \log \frac{T_f}{T_0} \tag{9.24.18}$$

e dalla prima

$$Q_2 = (C + nc_V + nR)\,(T_f - T_0) \tag{9.24.19}$$

da cui otteniamo il risultato finale

$$W = \left(\frac{T_f}{T_0} - 1\right) \lambda M + (C + nc_P) \left[T_f \log \frac{T_f}{T_0} - (T_f - T_0)\right] \tag{9.24.20}$$