PROBLEMA 9.25

Cilindro con gas e molla non lineare ⋆⋆ $\mathcal{S}$

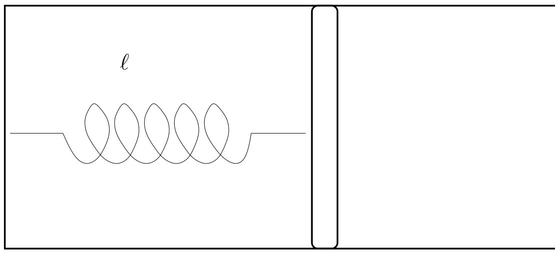

Figura 9.19.: Il cilindro contenente il gas. Il setto mobile è collegato al fondo con una molla non lineare.

Nel cilindro di sezione S in figura sono contenute n moli di un gas perfetto monoatomico, e la molla che collega il setto mobile al fondo ha lunghezza a riposo nulla ed esercita una forza di richiamo di modulo

$$F = k\ell^{\alpha} \tag{9.25.1}$$

dove ℓ è l'allungamento. Inizialmente il sistema è all'equilibrio, ad una temperatura T_0, e all'esterno del cilindro c'è il vuoto.

Determinare la legge che lega la pressione del gas al suo volume.

1. Si fornisce al sistema una quantità di calore dQ. Determinare la capacità termica.
2. Calcolare il massimo lavoro che è possibile estrarre dal sistema avendo a disposizione un bagno termico di temperatura $T_B < T_0$.

Soluzione[6]

Domanda 1

La pressione del gas deve equilibrare la forza che la molla applica al pistone, quindi

$$P = \frac{F}{S} = \frac{k\ell^{\alpha}}{S} = \frac{k}{S^{1+\alpha}} V^{\alpha}\,. \tag{9.25.2}$$

Domanda 2

Abbiamo

$$\begin{aligned} dQ &= dU = nc_V dT + k\ell^{\alpha} d\ell && (9.25.3)\\ &= nc_V dT + \frac{k}{S^{1+\alpha}} V^{\alpha} dV && (9.25.4) \end{aligned}$$

[6]Primo problema compitino 28 maggio 2008

d'altra parte

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{k}{S^{1+\alpha}} V^{\alpha} \tag{9.25.5}$$

cioè

$$V = S \left(\frac{nRT}{k} \right)^{1/(1+\alpha)} \tag{9.25.6}$$

e

$$dV = \frac{nRS}{k(1+\alpha)} \left(\frac{nRT}{k} \right)^{-\alpha/(1+\alpha)} dT \tag{9.25.7}$$

Sostituendo otteniamo

$$dQ = CdT = \left[nc_V + \frac{k}{S^{1+\alpha}} S^{\alpha} \left(\frac{nRT}{k} \right)^{\alpha/(1+\alpha)} \frac{nRS}{k(1+\alpha)} \left(\frac{nRT}{k} \right)^{-\alpha/(1+\alpha)} \right] dT \tag{9.25.8}$$

quindi

$$C = nc_V + n \frac{R}{(1+\alpha)} \tag{9.25.9}$$

Domanda 3

Ponendo uguale a zero la variazione di entropia del sistema abbiamo

$$\Delta S = \frac{Q_2}{T_B} + nc_v \log \frac{T_B}{T_0} + nR \log \left(\frac{T_B}{T_0} \right)^{1/(1+\alpha)} = 0 \tag{9.25.10}$$

da cui

$$Q_2 = nT_B \left(c_v + \frac{R}{1+\alpha} \right) \log \frac{T_0}{T_B} \tag{9.25.11}$$

D'altra parte

$$Q_1 = -\int_{T_0}^{T_B} CdT = n \left(c_V + \frac{R}{(1+\alpha)} \right) (T_0 - T_B) \tag{9.25.12}$$

e quindi

$$W = Q_1 - Q_2 = n \left(c_V + \frac{R}{(1+\alpha)} \right) \left[(T_0 - T_B) - T_B \log \frac{T_0}{T_B} \right] \tag{9.25.13}$$