

PROBLEMA 9.26

Congelamento di una provetta **

Una lunga provetta è riempita di un certo liquido di densità ρ_L e calore latente di fusione λ noti. Si osserva che ad una certa temperatura T_0 tutto il liquido al di sotto di una certa altezza si è solidificato. Si abbassa adesso la temperatura, portandola a $T_1 = T_0 - \Delta T$, e si osserva che la superficie di separazione tra solido e liquido è salita di un tratto ℓ . Ignorando l'espansione termica dei materiali calcolare la densità ρ_S del solido in funzione di $\rho_L, \lambda, T_0, \ell$ e ΔT .

Soluzione

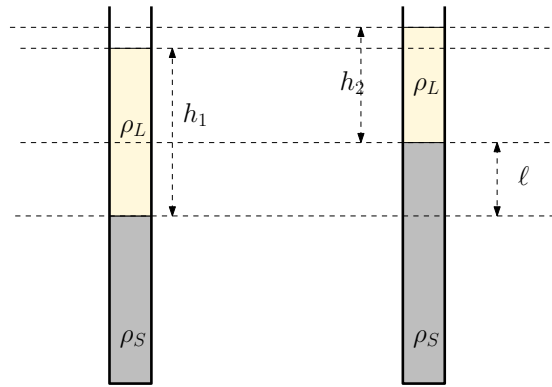


Figura 9.20.: La provetta prima (a sinistra) e dopo (a destra) l'abbassamento della temperatura. La parte solida è rappresentata in grigio, quella liquida in rosa.

La situazione prima e dopo l'abbassamento di temperatura è rappresentata in Figura 9.20. Scendendo lungo la provetta la pressione aumenta in accordo con la legge di Stevino. La separazione tra fase liquida e fase solida sarà quindi ad una altezza corrispondente alla pressione P_f del punto di fusione ad una data temperatura. Indicando con $h(T)$ l'altezza della colonna di liquido per una generica temperatura T avremo

$$P_f(T) = \rho_L g h(T)$$

Prendendo la derivata rispetto alla temperatura ed utilizzando l'equazione di Clapeyron abbiamo

$$\frac{dP_f}{dT} = \frac{\lambda}{T(\rho_L^{-1} - \rho_S^{-1})} = \rho_L g \frac{dh}{dT} \tag{9.26.1}$$

che si può integrare direttamente ottenendo

$$\rho_L g [h(T_1) - h(T_0)] = \frac{\lambda}{(\rho_L^{-1} - \rho_S^{-1})} \log\left(\frac{T_1}{T_0}\right)$$

Per la conservazione della massa deve essere

$$\rho_L h(T_0) = \rho_L h(T_1) + \rho_S \ell$$

e sostituendo $\rho_L \Delta h$ nell'equazione precedente otteniamo

$$\begin{aligned} \rho_S &= \rho_L \left[1 - \frac{\lambda}{g\ell} \log \left(\frac{T_1}{T_0} \right) \right] \\ &= \rho_L \left[1 - \frac{\lambda}{g\ell} \log \left(1 - \frac{\Delta T}{T_0} \right) \right] \end{aligned}$$