

PROBLEMA 9.28

**Raffreddare un corpo, scaldarne un altro \*\* S**

Standardi di capacità termica costante  $C$  sono inizialmente ad una temperatura  $T_i$ , e sono collegati mediante una macchina termica ciclica. Si vuole raffreddare il primo dei due corpi ad una temperatura finale  $T_1 < T_i$ , e si trova che per farlo è necessario fare un lavoro  $W$ .

1. Supponendo di conoscere  $W$  calcolare la temperatura  $T_2$  del secondo corpo.
2. Supponendo che la macchina termica sia reversibile, calcolare  $W = W_R$ .
3. Se in realtà il lavoro necessario è  $W = kW_R$ , dove  $k$  è una costante data, calcolare la variazione di entropia del sistema. Può accadere che  $k < 1$ ?

**Soluzione**<sup>7</sup>

**Domanda 1** Se  $Q_1$  è il calore estratto dal primo corpo, e  $Q_2$  quello fornito al secondo, dal primo principio abbiamo

$$Q_2 - Q_1 = W$$

ma d'altra parte

$$\begin{aligned} Q_2 &= C(T_2 - T_i) \\ Q_1 &= -C(T_1 - T_i) \end{aligned}$$

e quindi

$$W = C(T_1 + T_2 - 2T_i)$$

da cui

$$T_2 = \frac{W}{C} + 2T_i - T_1 \quad (9.28.1)$$

**Domanda 2** Se la macchina è reversibile l'entropia del sistema non è cambiata. Quest'ultima si scrive come

$$dS = -\frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2}$$

ed integrando

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{T_i}^{T_1} \frac{CdT'}{T'} + \int_{T_i}^{T_2} \frac{CdT'}{T'} \\ &= C \log \frac{T_1 T_2}{T_i^2} \end{aligned} \quad (9.28.2)$$

<sup>7</sup>Secondo esercizio scritto Fisica I del 10 settembre 2010.

Quindi

$$T_2 = \frac{T_i^2}{T_1}$$

e

$$W_R = CT_i \left( \frac{T_1}{T_i} + \frac{T_i}{T_1} - 2 \right) \equiv CT_i \left( x + \frac{1}{x} - 2 \right) \quad (9.28.3)$$

con  $x = T_1/T_i$ .

**Domanda 3** Mettendo insieme l'Equazione (9.28.1) e l'Equazione (9.28.2) otteniamo

$$x \left( \frac{kW_R}{CT_i} + 2 - x \right) = e^{\Delta S/C}$$

ossia

$$(k-1)(x-1)^2 = e^{\Delta S/C} - 1$$

Dato che  $\Delta S \geq 0$ , segue che  $k \geq 1$ . Infine

$$\Delta S = C \log \left[ 1 + (k-1)(x-1)^2 \right]$$