PROBLEMA 9.29

Recipiente a due scomparti ⋆⋆ $\mathcal{S}$

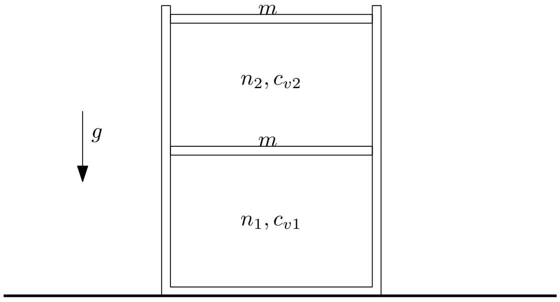

Figura 9.21.: Il recipiente con due scomparti considerato nell'esercizio.

Il recipiente in Figura 9.21 di sezione S è diviso in due parti da due setti scorrevoli di massa m. I due volumi sono occupati ciascuno da una mole di un gas perfetto monoatomico. Il setto superiore è impermeabile al calore, ed il sistema si trova inizialmente all'equilibrio (la pressione esterna è trascurabile) con entrambi i gas ad una temperatura T_0.

1. Determinare pressioni e volumi dei due gas nello stato iniziale.

2. Adesso anche il setto intermedio diviene impermeabile al calore, e si agisce reversibilmente su quello superiore fino a raddoppiare la pressione del gas nello scomparto superiore. Calcolare le nuove temperature dei due gas e dire di quanto è variata l'entropia del sistema.

3. Si permette adesso il passaggio di calore attraverso il setto intermedio, mantenendo bloccato quello superiore. Determinare la temperatura finale, e dire se è maggiore o minore di T_0. C'è stata variazione di entropia?

Soluzione[8]

Problema 1

Imponendo l'equilibrio meccanico abbiamo

$$P_{10} = \frac{2mg}{S}$$
$$P_{20} = \frac{mg}{S}$$

[8] Secondo esercizio scritto Fisica 1 dell'8 febbraio 2012

e dalla legge dei gas perfetti otteniamo

$$V_1 = \frac{RT_0}{P_{10}} = \frac{RT_0 S}{2mg}$$
$$V_2 = \frac{RT_0}{P_{20}} = \frac{RT_0 S}{mg}$$

Problema 2

La trasformazione dei due gas è adiabatica, quindi l'entropia non cambia. Per quanto riguarda le temperature abbiamo ($c_v = 3/2R, , \gamma = c_p/c_V = 5/3$)

$$\begin{aligned} T_1 P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} &= T_0 P_{10}^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ T_2 P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} &= T_0 P_{20}^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \end{aligned}$$

Sappiamo che $P_2 = 2mg/S$ e $P_1 = 3mg/S$? quindi

$$\begin{aligned} T_1 &= T_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0 \left(\frac{3}{2}\right)^{2/5} \simeq 1.18\, T_0 \\ T_2 &= T_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0 2^{2/5} \simeq 1.32\, T_0 \end{aligned}$$

Problema 3

L'energia del sistema

$$E = c_v\left(T_1 + T_2\right) + mg\frac{V_1}{S}$$

si conserva perchè durante l'evoluzione del sistema non ci sono forze esterne che fanno lavoro su di esso. Inoltre il volume totale $V_{tot} = V_1 + V_2$ non cambia. Abbiamo quindi

$$2c_v T_f + mg\frac{V_{1f}}{S} = c_v T_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + c_v T_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + \frac{R}{3} T_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = kRT_0$$

dove per brevità abbiamo posto

$$\begin{aligned} kR &= c_v \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + c_v \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + \frac{R}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ &= R\left[\left(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right] \\ &\simeq 4.13\, R \end{aligned}$$

Dall'equilibrio meccanico tra i due scomparti otteniamo

$$\frac{RT_f}{V_{1f}} = \frac{RT_f}{(V_{tot} - V_{1f})} + \frac{mg}{S}$$

da cui

$$\left(V_{tot} - 2V_{1f}\right) T_f = \frac{mg}{RS} V_{1f} \left(V_{tot} - V_{1f}\right)$$

Sostituendo il volume ricavato dalla prima equazione

$$V_{1f} = \frac{SR}{mg} \left(kT_0 - 3T_f\right)$$

otteniamo un'equazione di secondo grado in T_f

$$R\left(V_{tot} - \frac{2S}{mg} kRT_0 + \frac{4S}{mg} c_v T_f\right) T_f = \left(kRT_0 - 2c_v T_f\right) \left(V_{tot} - \frac{S}{mg} kRT_0 + 2\frac{S}{mg} c_v T_f\right)$$

Ricordando che

$$V_{tot} = \frac{3}{2} \frac{RT_0 S}{mg}$$

possiamo riscrivere quest'ultima come

$$30 \left(\frac{T_f}{T_0}\right)^2 - 4(4k - 3)\frac{T_f}{T_0} + k(2k - 3) = 0$$

che ha le due soluzioni

$$T_{f1} = 0.6\, T_0, \qquad T_{f2} = 1.20\, T_0$$

Solo la seconda è però accettabile, dato che la prima corrisponde ad un volume

$$V_{f1} = \frac{SR}{mg} \left(kT_0 - 3T_f\right) \simeq 2.3 \frac{RS}{mg} T_0$$

maggiore di quello totale a disposizione. Dato che la trasformazione del sistema è irreversibile, ci aspettiamo un aumento di entropia.