PROBLEMA 9.30

Massimo riscaldamento e raffreddamento ⋆⋆

Due corpi di identica capacità termica C, indipendente dalla temperatura, si trovano inizialmente alle temperature T_1 e T_2 differenti da quella T_0 dell'ambiente circostante, che può essere considerato un bagno termico. Calcolare

- il massimo aumento di entropia possibile per l'universo
- la massima temperatura a cui è possibile portare uno dei due corpi a scelta
- la minima temperatura a cui è possibile portare uno dei due corpi a scelta

Soluzione

Indichiamo con Q_0 il calore assorbito dall'ambiente e con Q_1 e Q_2 quelli assorbiti dai due corpi in una trasformazione arbitraria. Dal primo principio segue che dovrà essere

$$Q_0 + Q_1 + Q_2 = 0 \tag{9.30.1}$$

La massima produzione di entropia si avrà con una trasformazione spontanea che porta l'universo in uno stato di equilibrio complessivo, con tutti e tre i corpi alla stessa temperatura T_0 dell'ambiente. Per essa avremo

$$dS = dS_0 + dS_1 + dS_2 = \frac{dQ_0}{T_0} + \frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} \tag{9.30.2}$$

e quindi

$$dS = \frac{1}{T_0}\left(-dQ_1 - dQ_2\right) + \frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} \tag{9.30.3}$$

Dato che per ciascun corpo $dQ = CdT$ questo si può anche scrivere nella forma

$$dS = -\frac{C}{T_0}\left(dT_1 + dT_2\right) + C\frac{dT_1}{T_1} + C\frac{dT_2}{T_2} \tag{9.30.4}$$

ed integrando

$$\Delta S = C \log \frac{T_0^2}{T_1 T_2} - \frac{C}{T_0}\left(2T_0 - T_1 - T_2\right) \tag{9.30.5}$$

Per determinare la massima e la minima temperatura a cui è possibile portare uno dei due corpi consideriamo nuovamente la (9.30.4). Nella situazione finale uno dei due corpi (supponiamo si tratti di quello ad una temperatura iniziale T_2) sarà in equilibrio con l'ambiente. Allora

$$\Delta S = -\frac{C}{T_0}\left(T_1' - T_1 + T_0 - T_2\right) + C \log \frac{T_1'}{T_1} + C \log \frac{T_0}{T_2} \tag{9.30.6}$$

e quindi

$$\log \frac{T_1'}{T_1} - \frac{T_1'}{T_0} = \frac{\Delta S}{C} - \log \frac{T_0}{T_2} + \left(1 - \frac{T_2 + T_1}{T_0}\right) \tag{9.30.7}$$

che possiamo scrivere nella forma più simmetrica

$$\log \frac{T_1'}{T_0} - \frac{T_1'}{T_0} = 1 + \frac{\Delta S}{C} - \log \frac{T_0^2}{T_1 T_2} - \frac{T_2 + T_1}{T_0} \tag{9.30.8}$$

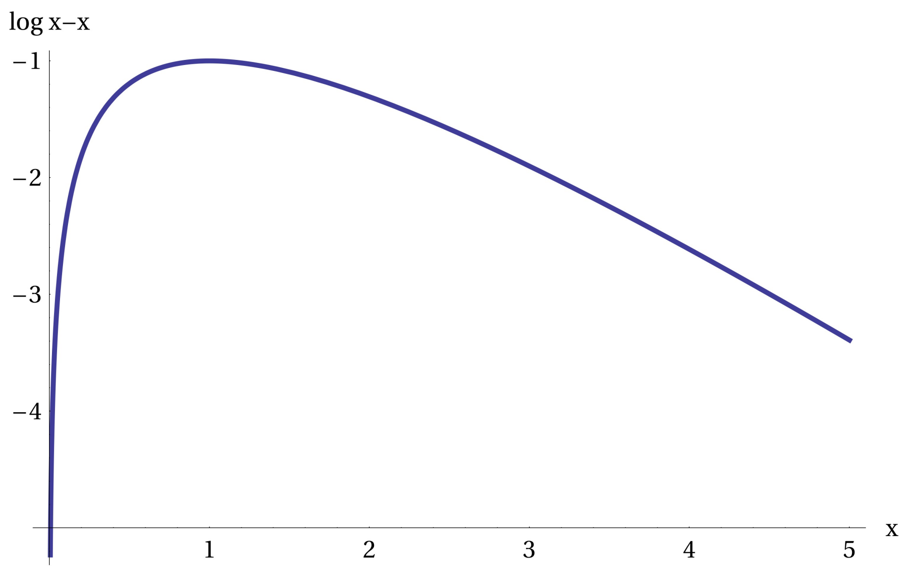

Figura 9.22.: La funzione $f(x) = \log x - x$

La funzione $f(x) = \log x - x$ (vedere Figura (9.22)) ha un unico massimo in con $f(x) = -1$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \tag{9.30.9}$$

Segue che sia il massimo che il minimo rapporto T_1'/T_0 si ha per $\Delta S = 0$, cioè nel caso di una trasformazione reversibile. Le relative temperature massime e minime saranno quindi le due soluzioni dell'equazione

$$\log \frac{T_1'}{T_0} - \frac{T_1'}{T_0} = 1 - \log \frac{T_0^2}{T_1 T_2} - \frac{T_2 + T_1}{T_0} \tag{9.30.10}$$

Notare che la massima produzione di entropia determinata precedentemente corrisponde a $T_1' = T_0$.