PROBLEMA 9.32

Adiabatica di un elastico ⋆⋆

Un elastico può essere descritto a livello macroscopico dalla sua energia interna U, dalla lunghezza ℓ, dalla temperatura T e dalla tensione τ. Supporremo che sia possibile scrivere l'energia interna nella forma

$$U = k\bar{\ell}T \tag{9.32.1}$$

e che valga

$$\tau = \gamma T\left(\ell - \bar{\ell}\right) \tag{9.32.2}$$

dove k, $\bar{\ell}$ e γ sono costanti positive opportunamente dimensionate. Determinare la forma di una trasformazione adiabatica reversibile (per $\ell > \bar{\ell}$) e rappresentarla nei piani $\tau - \ell$, $T - \ell$ e $T - S$.

Soluzione

Dalla primo principio della termodinamica abbiamo che

$$dQ = dU + dL$$

Nel caso in questione il lavoro fatto dall'elastico si scrive

$$dL = -\tau d\ell$$

dato che la forza applicata dall'elastico ad un suo estremo vale τ in modulo (per $\ell > \bar{\ell}$) ed è diretta in verso opposto allo spostamento. Quindi

$$dQ = k\bar{\ell}dT - \gamma T\left(\ell - \bar{\ell}\right)d\ell$$

da cui troviamo il differenziale dell'entropia

$$dS = \frac{dQ}{T} = k\bar{\ell}\frac{dT}{T} - \gamma\left(\ell - \bar{\ell}\right)d\ell$$

Questa espressione si può immediatamente integrare, ottenendo

$$S = k\bar{\ell}\log T - \frac{\gamma}{2}\left(\ell - \bar{\ell}\right)^2 + C$$

dove C è una costante di integrazione. Ma in un'adiabatica reversibile l'entropia resta costante, per cui la trasformazione nel piano $T - S$ si rappresenta come una retta verticale. Inoltre deve essere

$$T = \bar{T}\exp\left[\frac{\gamma\bar{\ell}}{2k}\left(\frac{\ell}{\bar{\ell}} - 1\right)^2\right] \tag{9.32.3}$$

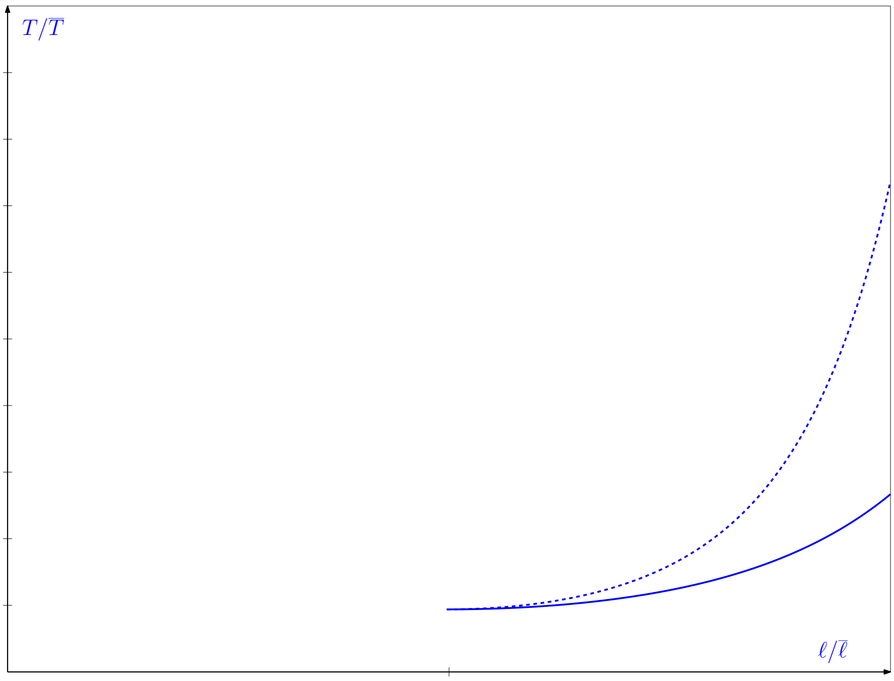

Figura 9.24.: La dipendenza della temperatura dalla lunghezza dell'elastico, per una trasformazione adiabatica reversibile (Eq. (9.32.3)). La temperatura è misurata in unità $\overline{T}$, e la lunghezza dell'elastico in unità della lunghezza a riposo $\overline{\ell}$. Si è scelto $\gamma\overline{\ell}/(2k) = 1$ per la curva continua e $\gamma\overline{\ell}/(2k) = 2$ per quella tratteggiata.

dove $\overline{T}$ è una costante arbitraria che si può interpretare come temperatura dell'elastico alla lunghezza di riposo. Questa è la legge che lega T a ℓ rappresentata in Figura (9.24).

Scegliendo di misurare la temperatura in unità $\overline{T}$ e la lunghezza in unità $\overline{\ell}$ la curva è completamente caratterizzata dal parametro adimensionale $\Pi = \gamma\overline{\ell}/(2k)$. Come si vede l'elastico allungato si riscalda, tanto più rapidamente quanto più Π è grande.

Veniamo alla dipendenza della tensione dall'allungamento. Usando l'Equazione (9.32.2) si può anche scrivere

$$\tau = 2k\overline{T}\frac{\gamma\overline{\ell}}{2k}\left(\frac{\ell}{\overline{\ell}} - 1\right)\exp\left[\frac{\gamma\overline{\ell}}{2k}\left(\frac{\ell}{\overline{\ell}} - 1\right)^2\right]$$

che è rappresentata nel piano $\tau - \ell$ in Figura 9.25

Anche in questo caso se misuriamo la tensione in unità $2k\overline{T}$ e la lunghezza in unità $\overline{\ell}$ la curva è completamente caratterizzata dal parametro Π. L'area sotto la curva cambiata di segno rappresenta il lavoro fatto dall'elastico durante la trasformazione, in unità $2k\overline{T}\overline{\ell}$.

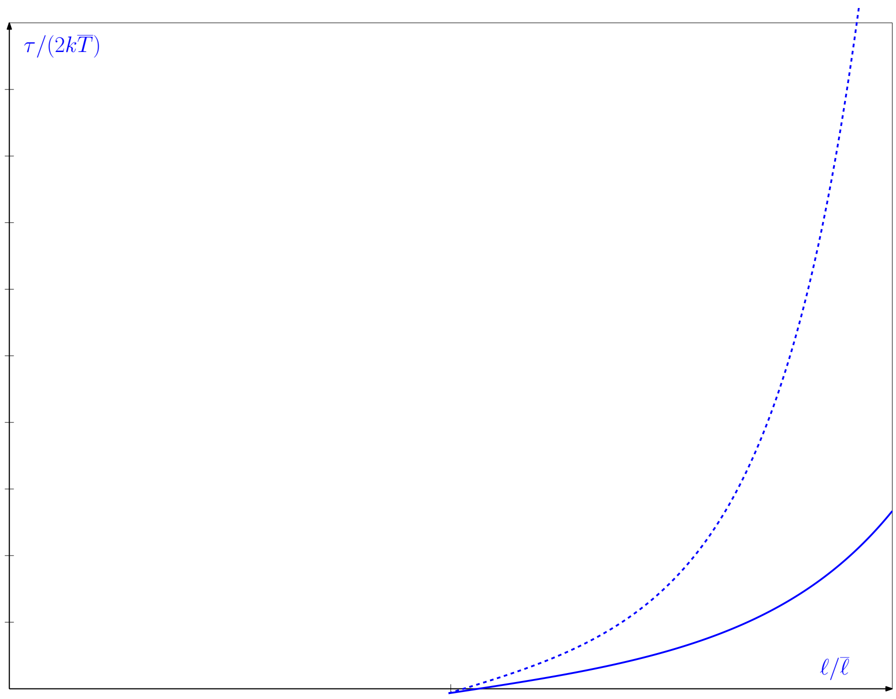

Figura 9.25.: La dipendenza della tensione dalla lunghezza dell'elastico, per una trasformazione adiabatica reversibile (Eq. (9.32.3)). La tensione è misurata in unità $2k\overline{T}$, e la lunghezza dell'elastico in unità della lunghezza a riposo $\overline{\ell}$. Si è scelto $\gamma\overline{\ell}/(2k) = 1$ per la curva continua e $\gamma\overline{\ell}/(2k) = 2$ per quella tratteggiata.