PROBLEMA 9.33

Stati accessibili ⋆⋆

Due corpi hanno la stessa capacità termica C dipendente linearmente dalla temperatura, $C = bT$, e si trovano inizialmente alla stessa temperatura T_0,. Si dispone inoltre di un bagno termico di temperatura T_B. Si possono eseguire sul sistema trasformazioni termodinamiche arbitrarie, reversibili o irreversibili, facendo anche uso di macchine termiche. Gli scambi di calore devono però avvenire solo tra le tre parti (i due corpi e il bagno termico). Inoltre non si dispone inizialmente di lavoro utile da impiegare, anche se è possibile volendo estrarlo dal sistema, conservarlo e/o impiegarlo nuovamente.

Determinare nel piano T_1-T_2 la regione accessibile per il sistema partendo dallo stato iniziale. Localizzare in tale regione

- lo stato iniziale
- lo stato di massima entropia
- lo stato di massima e minima temperatura per uno dei due corpi, scelto arbitrariamente.

Soluzione

Indichiamo con Q_1, Q_2 e Q_B il calore ceduto rispettivamente ai due corpi e al bagno termico durante le trasformazioni. Dal primo principio abbiamo

$$Q_1 + Q_2 + Q_B + W = 0$$

dove W è il lavoro utile prodotto. Inoltre

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_{T_0}^{T_1} kTdT = b\left(\frac{T_1^2}{2} - \frac{T_0^2}{2}\right) \\ Q_2 &= \int_{T_0}^{T_2} kTdT = b\left(\frac{T_2^2}{2} - \frac{T_0^2}{2}\right) \end{aligned}$$

L'entropia prodotta sarà

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{Q_B}{T_B} + \int \frac{dQ_1}{T_1} + \int \frac{dQ_2}{T_2} \\ &= \frac{Q_B}{T_B} + \int_{T_0}^{T_1} \frac{bTdT}{T} + \int_{T_0}^{T_2} \frac{bTdT}{T} \\ &= \frac{Q_B}{T_B} + b\left(T_1 + T_2 - 2T_0\right) \end{aligned}$$

e quindi

$$\Delta S = -\frac{1}{T_B}\left(W + Q_1 + Q_2\right) + b\left(T_1 + T_2 - 2T_0\right)$$

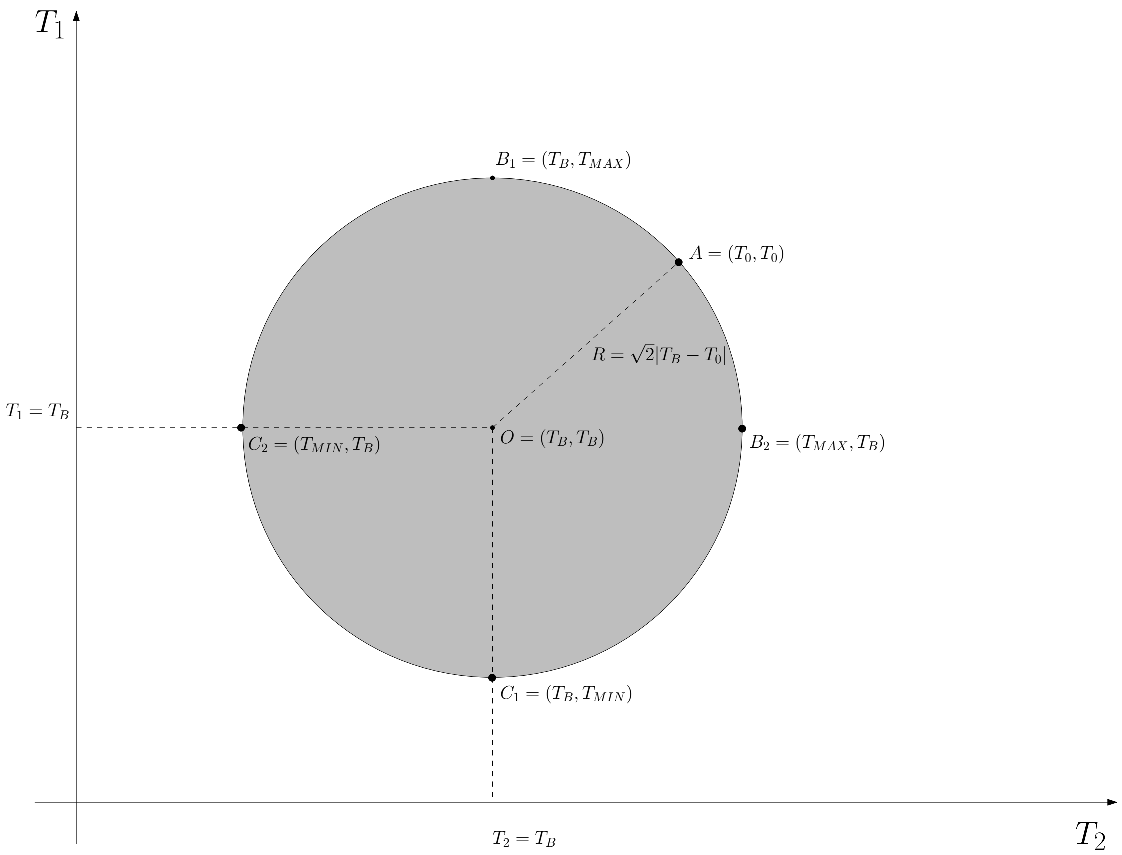

Figura 9.26.: L'insieme degli stati accessibili nel piano T_1-T_2. Si tratta di una circonferenza con centro nello stato accessibile di massima entropia $T_1 = T_2 = T_B$ e raggio $R = \sqrt{2}\,|T_B - T_0|$.

ossia

$$b\,(T_1 + T_2 - 2T_0) - \frac{b}{2T_B}\left(T_1^2 + T_2^2 - 2T_0^2\right) = \Delta S + \frac{W}{T_B}$$

Affinchè lo stato sia accessibile dovrà essere $\Delta S \geq 0$ (per non violare il secondo principio della termodinamica) e $W \geq 0$ (non abbiamo a disposizione lavoro utile da fare sul sistema). La regione accessibile sarà dunque

$$2T_B\,(T_1 + T_2 - 2T_0) - \left(T_1^2 + T_2^2 - 2T_0^2\right) \geq 0$$

che possiamo riscrivere nella forma

$$(T_1 - T_B)^2 + (T_2 - T_B)^2 \leq 2\,(T_B - T_0)^2$$

Si tratta quindi della circonferenza con centro in $(T_1, T_2) = (T_B, T_B)$ e raggio $\sqrt{2}\,|T_B - T_0|$ rappresentata in Figura 9.26.

Nello stato iniziale abbiamo $T_1 = T_2 = T_0$, si tratta quindi del punto indicato con A.

Nello stato di massima entropia $T_1 = T_2 = T_B$: si tratta quindi del centro O della circonferenza.

Lo stato di massima temperatura per uno dei due corpi corrisponde a B_1 ($T_1 = T_{MAX}$ e $T_2 = T_B$) oppure a B_2 ($T_1 = T_B$ e $T_2 = T_{MAX}$) a seconda del corpo scelto. In entrambi i casi

$$T_{MAX} = T_B + \sqrt{2}\,|T_B - T_0|$$

Analogamente lo stato di minima temperatura per uno dei due corpi corrisponde a C_1 ($T_1 = T_{MIN}$ e $T_2 = T_B$) oppure a B_2 ($T_1 = T_B$ e $T_2 = T_{MIN}$), con

$$T_{MIN} = T_B - \sqrt{2}\,|T_B - T_0|$$