PROBLEMA 9.34

Riscaldamento massimo di un corpo ⋆⋆

Un corpo ha una capacità termica C e si trova inizialmente ad una temperatura T_0,. Si dispone inoltre di un bagno termico di temperatura T_B. Si possono eseguire sul sistema trasformazioni termodinamiche arbitrarie, reversibili o irreversibili, facendo anche uso di macchine termiche. Gli scambi di calore devono però avvenire solo tra le due parti (i due corpi e il bagno termico). Inoltre non si dispone inizialmente di lavoro utile da impiegare, anche se è possibile volendo estrarlo dal sistema, conservarlo e/o impiegarlo nuovamente.

Determinare la massima temperatura raggiungibile dal corpo, discutendo i casi $T_0 < T_b$ e $T_0 > T_b$.

Soluzione

Prima di eseguire calcoli dettagliati consideriamo qualitativamente la situazione. Supponiamo che inizialmente $T_0 > T_b$. Chiaramente non sarà possibile riscaldare ulteriormente il corpo, dato che se questo fosse possibile allora esisterebbe una trasformazione termodinamica capace unicamente di trasferire calore da un corpo più freddo ad uno più caldo. Se $T_0 < T_b$ potremmo anzitutto pensare di mettere in contatto bagno termico e corpo, portando quest'ultimo alla temperatura T_b. In realtà è possibile fare meglio: inizialmente si può trasferire reversibilmente del calore dal bagno al corpo, ottenendo del lavoro utile. Avremo a questo punto portato nuovamente il corpo a T_b, e potremo utilizzare il lavoro ottenuto per spostare ulteriormente calore dal bagno al corpo ottenendo una temperatura finale $T_f > T_b$. Veniamo adesso ad una analisi dettagliata.

Durante le trasformazioni verrà ceduto complessivamente un calore Q_c al corpo, e Q_b al bagno termico. Al termine disporremo eventualmente di un lavoro estratto W. Dal primo principio abbiamo

$$Q_c + Q_b + W = 0 \tag{9.34.1}$$

Inoltre possiamo scrivere

$$Q_c = \int_{T_0}^{T_f} C dT = C\left(T_f - T_0\right) \tag{9.34.2}$$

L'aumento di entropia del sistema sarà dato da

$$\Delta S = \int \frac{dQ_c}{T} + \int \frac{dQ_b}{T_b}$$

dove il primo termine rappresenta la variazione di entropia del corpo e il secondo quella del bagno termico. Da $dQ_c = CdT$ otteniamo

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int_{T_0}^{T_f} \frac{C}{T} dT + \frac{Q_b}{T_b} \\ &= C \log \frac{T_f}{T_0} + \frac{Q_b}{T_b}\end{aligned}$$

e di conseguenza

$$Q_b = T_b \Delta S - C T_b \log \frac{T_f}{T_0} \tag{9.34.3}$$

Sostituendo la (9.34.2) e la (9.34.3) nella (9.34.1) otteniamo

$$\frac{T_f}{T_b} - \log \frac{T_f}{T_b} = \frac{T_0}{T_b} - \log \frac{T_0}{T_b} - \frac{W}{C T_b} - \frac{\Delta S}{C}$$

che possiamo riscrivere nella forma

$$F\left(\frac{T_f}{T_b}\right) = F\left(\frac{T_0}{T_b}\right) - \frac{W}{C T_b} - \frac{\Delta S}{C} \tag{9.34.4}$$

con $F(x) = x - \log x$. Ci interessano i valori di T_f che verificano l'espressione precedente. $F(x)$ ha un unico minimo in $x = 1$, cioè per $T_f = T_b$ (vedere Figura 9.27). Al variare della costante al secondo membro avremo quindi due soluzioni oppure nessuna. Se le soluzioni esistono, la maggiore tra le due crescerà al crescere del valore del membro destro. Quindi la temperatura maggiore si otterrà per $W = 0$ e $\Delta S = 0$. In questo caso l'equazione diviene

$$\frac{T_f}{T_b} - \log \frac{T_f}{T_b} = \frac{T_0}{T_b} - \log \frac{T_0}{T_b}$$

ed una soluzione è chiaramente $T_f = T_0$.

Possiamo concludere che se $T_0 < T_b$ la seconda soluzione corrisponderà ad un valore $T_f > T_b$, e quindi in questo caso è possibile portare la temperatura del corpo ad un valore maggiore di quello del bagno termico. Se invece $T_0 > T_b$ la seconda soluzione darà $T_f < T_b < T_0$. In questo caso non sarà possibile aumentare la temperatura del corpo. Entrambe le possibilità confermano la discussione qualitativa iniziale.

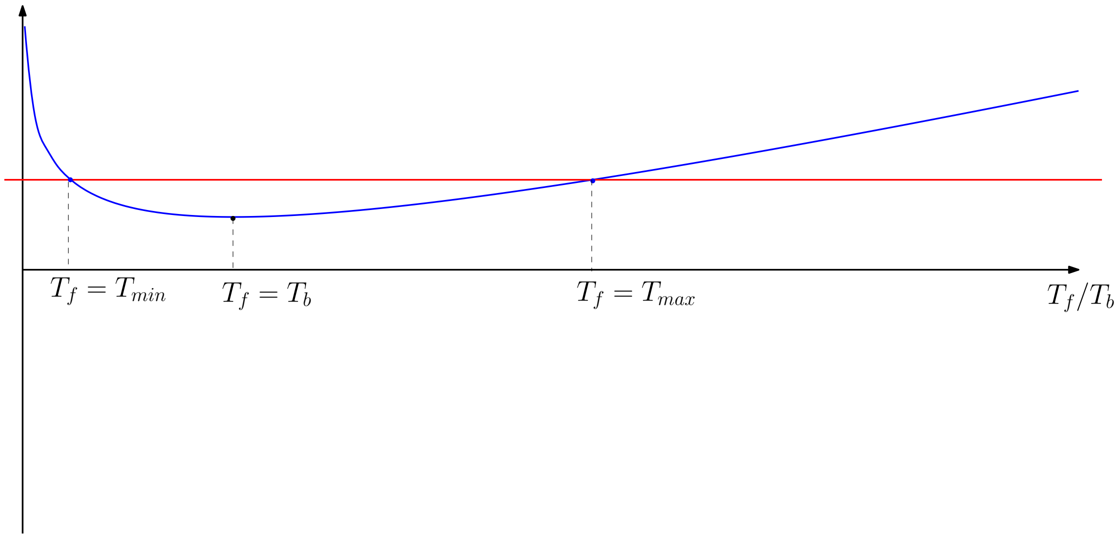

Figura 9.27.: La funzione $F(T_f/T_b)$ (in blu) confrontata con un possibile valore della costante $F(T_0/T_b) - W/(CT_b) - \Delta S/C$ a secondo membro nell'Equazione (9.34.4) (in rosso). Come discusso nel testo, la funzione ha un minimo per $T_f = T_b$. Se la costante è abbastanza grande si hanno due intersezioni, che corrispondono alle possibili temperature massime e minime finali del corpo.