PROBLEMA 9.3

Adiabaticità e velocità di una trasformazione ⋆⋆⋆

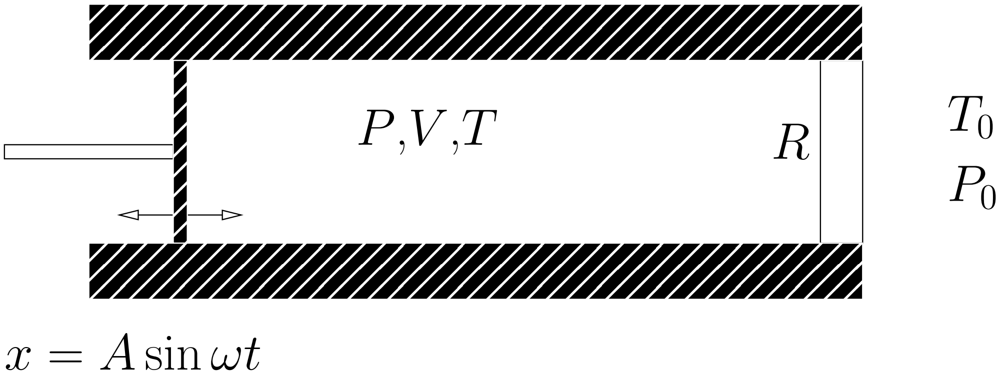

Figura 9.1.: Il sistema considerato nel problema. Le pareti scure sono impermeabili al calore.

Il recipiente schematizzato in Figura 9.1 ha le pareti e il pistone impermeabili al calore, mentre la base ha una resistenza termica R. Viene riempito con n moli di gas perfetto, e si trova inizialmente in equilibrio con l'ambiente esterno, $P = P_0$ e $T = T_0$ (il pistone viene lasciato libero di muoversi).

Dal tempo $t = 0$ si obbliga il pistone a muoversi secondo la legge $x = A\sin\omega t$, dove x è lo spostamento dalla posizione iniziale di equilibrio. Si attende quindi un tempo sufficientemente lungo, in modo da far perdere al sistema memoria della condizione iniziale.

Supponendo di poter considerare la temperatura e la pressione del gas uniforme si calcoli $T(t)$, e si verifichi che per ω abbastanza grandi la trasformazione si può considerare adiabatica.

Considerare piccola la variazione relativa di volume.

Soluzione

Dal primo principio e dall'equazione di stato abbiamo

$$dQ = nc_v dT + nRT\frac{dV}{V} \tag{9.3.1}$$

d'altra parte possiamo anche scrivere

$$R\frac{dQ}{dt} = T_0 - T \tag{9.3.2}$$

e quindi

$$nc_v \frac{dT}{dt} + nRT \frac{d\log V}{dt} = \frac{1}{R_T}\left(T_0 - T\right) . \tag{9.3.3}$$

Il volume è una funzione nota del tempo,

$$V = V_0 + SA \sin \omega t \tag{9.3.4}$$

e possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{\tau R}{c_v}\frac{d\log V}{dt}\right) T = \frac{T_0}{\tau} \tag{9.3.5}$$

dove abbiamo introdotto $\tau = nc_v R_T$, che possiamo considerare la scala temporale caratteristica degli scambi di calore tra gas e ambiente esterno. In effetti tenendo fissato il volume vediamo che τ e proprio il tempo nel quale una differenza di temperatura tra esterno e interno si riduce di un fattore e^{-1}.

L'equazione differenziale ottenuta è lineare e del primo ordine, e la sua soluzione si determina con un metodo standard. Moltiplicando membro a membro per un opportuno fattore integrante

$$\left[\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{\tau R}{c_v}\frac{d\log V}{dt}\right) T\right] e^{t/\tau + R/c_v \log V(t)} = \frac{T_0}{\tau} e^{t/\tau + R/c_v \log V(t)} \tag{9.3.6}$$

abbiamo

$$\frac{d}{dt}\left[T e^{t/\tau + R/c_v \log V}\right] = \frac{T_0}{\tau} e^{t/\tau + R/c_v \log V} \tag{9.3.7}$$

e integrando otteniamo

$$T = \frac{T_0}{\tau} e^{-t/\tau - R/c_v \log V(t)} \int_0^t e^{t'/\tau + R/c_v \log V(t')} dt' + C e^{-t/\tau - R/c_v \log V(t)} \tag{9.3.8}$$

ossia (indicando con $\varepsilon = AS/V$ la massima variazione relativa di volume, $\varepsilon \ll 1$)

$$T = C \frac{e^{-t/\tau}}{(1+\varepsilon \sin \omega t)^{R/c_v}} + \frac{T_0}{\tau} \frac{e^{-t/\tau}}{(1+\varepsilon \sin \omega t)^{R/c_v}} \int_0^t \left(1 + \varepsilon \sin \omega t'\right)^{R/c_v} e^{t'/\tau} dt' . \tag{9.3.9}$$

Sviluppando al primo ordine in ε, e osservando che a causa delle condizioni iniziali $C = T_0$, otteniamo

$$T = T_0 e^{-t/\tau}\left(1 - \varepsilon \frac{R}{c_v}\sin \omega t\right) + \frac{T_0}{\tau} e^{-t/\tau}\left(1 - \varepsilon \frac{R}{c_v}\sin \omega t\right) \int_0^t \left(1 + \varepsilon \frac{R}{c_v}\sin \omega t'\right) e^{t'/\tau} dt' \tag{9.3.10}$$

e calcolando l'integrale otteniamo

$$T = T_0 \left\{1 - \varepsilon \frac{R}{c_v} \frac{e^{-t/\tau}}{1+\omega^2\tau^2}\left[-\omega\tau + e^{t/\tau}\omega\tau \cos \omega t - \left(1+\omega^2\tau^2\right)\sin \omega\tau \right.\right. \tag{9.3.11}$$

$$\left.\left. + e^{t/\tau}\omega^2\tau^2 \sin \omega t\right]\right\} \tag{9.3.12}$$

Per tempi grandi rispetto a τ possiamo eliminare i termini che tendono a zero esponenzialmente, e troviamo

$$T = T_0 \left[1 - \varepsilon \frac{R}{c_v} \frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} \left(\cos\omega t + \omega\tau \sin\omega t \right) \right] . \tag{9.3.13}$$

Per $\omega \gg \tau^{-1}$ abbiamo

$$T \simeq T_0 \left[1 - \varepsilon \frac{R}{c_v} \sin\omega t \right] . \tag{9.3.14}$$

e confrontando con l'andamento del volume

$$V = V_0 \left(1 + \varepsilon \sin\omega t \right) \tag{9.3.15}$$

troviamo che la combinazione $V^{R/c_v} T$ è approssimativamente costante

$$V^{R/c_v} T = V_0^{R/c_v} T_0 + O\left(\varepsilon^2\right)$$

cioè la trasformazione del gas è adiabatica.