PROBLEMA 9.4

Rendimento di un ciclo di Carnot ⋆

Calcolare esplicitamente il rendimento di un ciclo di Carnot di un gas perfetto, esprimendolo in funzione delle sole temperature della sorgente calda e della sorgente fredda utilizzate.

Soluzione

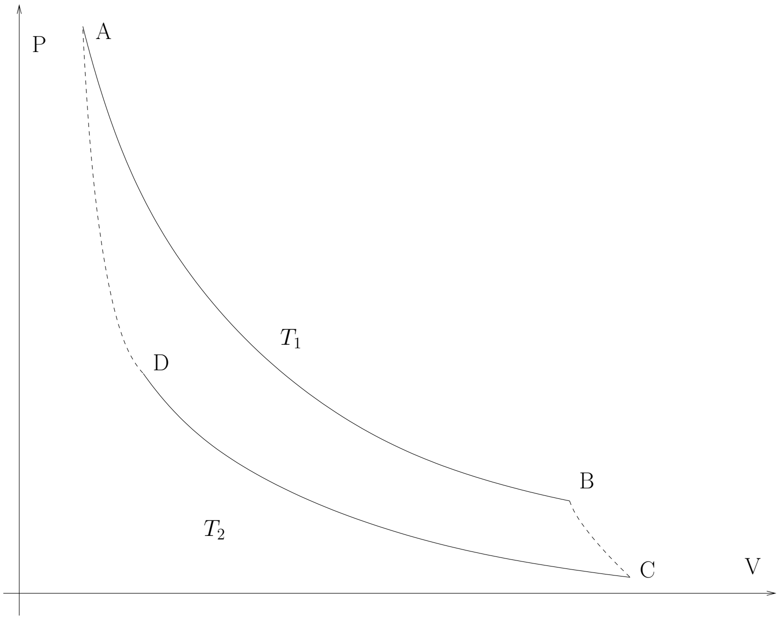

Figura 9.2.: Il ciclo di Carnot rappresentato nel piano $P-V$ per un gas perfetto. Le adiabatiche sono tratteggiate, le isoterme continue. T_1 e T_2 sono le temperature rispettivamente della sorgente calda e fredda.

Il rendimento è definito dal rapporto tra lavoro e calore assorbito. Calcoliamo il lavoro fatto in una trasformazione isoterma

$$L_{X\to Y} = \int_{V_X}^{v_Y} P dV = nRT \int_{V_X}^{V_Y} \frac{dV}{V} = nRT \log \frac{V_Y}{V_X} \tag{9.4.1}$$

e in una trasformazione adiabatica, per la quale il prodotto PV^γ è costante:

$$\begin{aligned} L_{X\to Y} &= \int_{V_X}^{V_Y} P dV = P_X V_X^\gamma \int_{V_X}^{V_Y} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{1}{1-\gamma} P_X V_X^\gamma \left(\frac{1}{V_Y^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_X^{\gamma-1}} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{P_X V_X^\gamma}{V_X^{\gamma-1}} - \frac{P_Y V_Y^\gamma}{V_Y^{\gamma-1}} \right) = \frac{1}{\gamma-1} \left(P_X V_X - P_Y V_Y \right) \end{aligned} \tag{9.4.2}$$

Abbiamo utilizzato il fatto che $P_X V_X^\gamma = P_Y V_Y^\gamma$., e quindi amente potevamo osservare che per una trasformazione adiabatica $dU = -dL$, e quindi

$$L_{X\to Y} = nc_v \left(T_X - T_Y\right) \tag{9.4.3}$$

che coincide con l'espressione precedente.

Per quanto riguarda il calore scambiato, sappiamo che è nullo in una trasformazione adiabatica. In una trasformazione isoterma dal primo principio, e dal fatto che per un gas perfetto l'energia interna dipende dalla sola temperatura segue, facendo riferimento alla Figura 9.2,

$$dQ = dU + dL = c_v dT + dL = dL \tag{9.4.4}$$

cioè il calore assorbito è uguale al lavoro fatto dal gas. Abbiamo in conclusione

$$\eta = \frac{L}{Q_{A\to B}} = \frac{L_{A\to B} + L_{B\to C} + L_{C\to D} + L_{D\to A}}{L_{A\to B}} \tag{9.4.5}$$

$$= \frac{nRT_1 \log \frac{V_B}{V_A} + nc_v\left(T_1 - T_2\right) + nRT_2 \log \frac{V_D}{V_C} + nc_v\left(T_2 - T_1\right)}{nRT_1 \log \frac{V_B}{V_A}} \tag{9.4.6}$$

$$= 1 + \frac{T_2}{T_1}\frac{\log V_D/V_C}{\log V_B/V_A} = 1 + \frac{T_2}{T_1}\frac{\log V_D/V_C}{\log V_B/V_A} \tag{9.4.7}$$

ma utilizzando le relazioni

$$V_D = V_A \frac{T_1^\alpha}{T_2^\alpha}, \qquad V_C = V_B \frac{T_1^\alpha}{T_2^\alpha} \tag{9.4.8}$$

otteniamo semplicemente

$$\eta = 1 + \frac{T_2}{T_1}\frac{\log V_A/V_B}{\log V_B/V_A} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \tag{9.4.9}$$